

Dinamica dei Sistemi Aziendali

Prova parziale del 12 dicembre 2025

Esercizio 1 (20 punti). Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P)$$

- a) Scrivere il problema duale del problema (P) .
- b) Data la base $B = \{2, 3\}$, trovare la soluzione di base primale e la soluzione di base duale relative a B . Dire se le soluzioni trovate sono ammissibili e/o degeneri, motivando le risposte.
- c) Effettuare una iterazione dell'algoritmo del simplesso primale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. La nuova soluzione di base ottenuta è ottima per il problema (P) ?
- d) Si consideri ora il problema perturbato

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 13 + \varepsilon \\ & x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

Trovare il valore ottimo del problema perturbato (P_ε) al variare del parametro ε nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 2 (11 punti). Trovare la soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare Intera

$$\begin{cases} \max & 5x_1 + 4x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

con il seguente metodo Branch and Bound:

- in ogni nodo dell'albero di enumerazione risolvere il rilassamento continuo;
- la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta arrotondando la soluzione ottima del rilassamento continuo del nodo radice;
- in ogni nodo che rimane aperto fare un *branch* binario istanziando la prima variabile che non ha un valore intero nella soluzione ottima del rilassamento continuo;
- visitare in ampiezza l'albero di enumerazione.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Il problema duale di (P) è

$$\begin{cases} \min & 13y_1 + 13y_2 \\ & 2y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\ & y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

b) La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi la soluzione di base primale è

$$\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13/2 \end{pmatrix},$$

che è ammissibile (perché i vincoli 1 e 4 sono soddisfatti in $\bar{x}$) e non degenera (perché i vincoli 1 e 4 non sono attivi in $\bar{x}$). La soluzione di base duale è

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (5, 4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (2, -3) \quad \bar{y}^T = (0, 2, -3, 0),$$

quindi $\bar{y}$ non è ammissibile (perché $\bar{y}_3 < 0$) e non degenera (perché $\bar{y}_2 \neq 0$ e $\bar{y}_3 \neq 0$).

c) Partendo dalla base $B = \{1, 4\}$, la matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (5/2, -3/2)$. L'indice uscente è $h = 4$, la direzione di spostamento è $W^4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolando

$$A_N W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

si ricava

$$\vartheta = \min \left\{ \frac{13/2}{3/2}, \frac{13/2}{1/2} \right\} = 13/3,$$

e l'indice entrante è $k = 2$. Pertanto la nuova base è $B = \{1, 2\}$. La matrice di base è $A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, la soluzione di base primale è $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 13/3 \end{pmatrix}$ e la soluzione di base duale $\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = (2, 1)$ è ammissibile, quindi $(13/3, 13/3)$ è una soluzione ottima di (P) .

d) Poiché la soluzione ottima del duale di (P) è $\bar{y} = (2, 1, 0, 0)$ si ha

$$v(P_\varepsilon) = v(P) + \bar{y}_1 \varepsilon = 39 + 2\varepsilon.$$

Esercizio 2.

Dall'esercizio 1 sappiamo che la soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $(13/3, 13/3)$ da cui si ottiene $v_S(P) = 39$.

Arrotondando per difetto entrambe le componenti di $(13/3, 13/3)$ si ottiene la soluzione ammissibile $(4, 4)$, da cui si ottiene $v_I(P) = 36$. Scegliamo la variabile x_1 per generare i nodi del primo livello dell'albero di enumerazione, fissando $x_1 \leq 4$ oppure $x_1 \geq 5$.

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_1 è $(4, 9/2)$ di valore 38, quindi $v_S(P_1) = 38 > 36 = v_I(P)$, il nodo P_1 rimane aperto ed istanziamo la variabile x_2 per generare i due nodi figli di P_1 .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_2 è $(5, 3)$ di valore 37. Poiché $(5, 3)$ ha entrambe le componenti intere, aggiorniamo $v_I(P) = 37$ e chiudiamo il nodo P_2 .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_3 è $(4, 4)$ di valore 36, quindi $v_S(P_3) = 36 < v_I(P)$, pertanto chiudiamo il nodo P_3 .

La soluzione ottima del rilassamento continuo di P_4 è $(3, 5)$, quindi $v_S(P_4) = 35 < v_I(P)$, pertanto chiudiamo anche il nodo P_4 .

Avendo chiuso tutti i nodi dell'albero di enumerazione, concludiamo che $(5, 3)$ è una soluzione ottima del problema di PLI.

