Esercizi sullo studio di funzione

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si dimostri che f ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

2. Sia $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ continua in $x = 0$ e tale che $f(x) = f(x^2)$ per ogni $x \in (-1,1)$. Si dimostri che f è costante.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \min\left\{1 + x^2, \frac{20}{x^2+16}\right\}.$$

Tra tutti i rettangoli della forma $[-a,a] \times [0,b]$ contenuti nell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \le y \le f(x)\}$$

si trovi quello di area massima.

4. Si studino le seguenti funzioni, discutendone: dominio naturale, eventuali simmetrie/periodicità, limiti agli estremi del dominio e asintoti, continuità e derivabilità, monotonia, esistenza di punti di massimo o minimo relativi o assoluti e segno,:

$$f(x) = \log\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right),$$

$$g(x) = -\frac{1}{\log(1+\arctan x)},$$

$$h(x) = \frac{x\log|x| - (x+1)\log|x+1|}{x},$$

$$u(x) = \frac{x^x}{1+x^{2x}}.$$

5. Si studino le seguenti funzioni, discutendone: dominio naturale, eventuali simmetrie/periodicità, limiti agli estremi del dominio e asintoti, continuità e derivabilità, monotonia ed esistenza di punti di massimo o minimo relativi o assoluti, convessità, esistenza di eventuali punti di flesso e segno:

$$f_1(x) = 2\log(1+x^2) + 3\arctan\frac{1}{x},$$

$$f_2(x) = xe^{\frac{1}{\log x}},$$

$$f_3(x) = \sinh\left(\frac{1+x^2}{x}\right)$$

6. Si scriva l'equazione della retta tangente sia al grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ sia al grafico della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2x}$.

7. Si discuta, al variare di $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ la risolubilità dell'equazione

$$x = \log_\alpha x.$$