Esercizi sugli sviluppi di Taylor

1. Si scriva il polinomio di Taylor del terzo ordine centrato in $x_0 = 2$ della funzione

$$f(x) = \frac{3x+1}{x}.$$

2. Si scriva lo sviluppo di McLaurin al terzo ordine della funzione

$$f(x) = e^{x^2} \log(1+x).$$

3. Si calcolino i seguenti limiti (se esistono):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x + x(\cos x - 1)}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x + 3e^{x^3} + 2\sqrt[3]{1+x^2} - 5}{\sqrt[4]{1+2x^2} - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x - \frac{x^2}{3}\log(1+x)}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}(\sin x)^2}{\sin^2(x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{\sin^4 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^6) - (\sin x)^6}{x^8} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)\left(e^{x-2} - \cos(\pi x)\right)}{\sin^2(x-2)}.$$

4. Data una funzione $f(x)$ con il seguente sviluppo di McLaurin

$$f(x) = 2 + 2x^2 - x^3 + o\left(x^3\right), \quad \text{per } x \to 0$$

si stabilisca se f ha un punto di estremo relativo in $x = 0$ e, in caso di risposta affermativa, si precisi se si tratta di un punto di massimo o di minimo.

5. Data una funzione $f(x)$ con il seguente sviluppo di McLaurin

$$f(x) = 3 + x^3 + o\left(x^3\right), \quad \text{per } x \to 0$$

si stabilisca se f ha un punto di estremo relativo in $x = 0$ e, in caso di risposta affermativa, si precisi se si tratta di un punto di massimo o di minimo.

6. Si determini l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} - e^{-\frac{1}{6}}$$

e si calcoli il valore del seguente limite (se esiste):

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

7. Per quali valori di $k \in \mathbb{N}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (\cosh x)^2, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è di classe $C^k(\mathbb{R})$ (cioè derivabile k volte su tutto $\mathbb{R}$ con tutte le derivate fino all'ordine k continue)?

8. Per quali valori di $k \in \mathbb{N}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1 - x^2), & \text{se } x \leq 0, \\ 1 - e^{x^2}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

è di classe $C^k(\mathbb{R})$ (cioè derivabile k volte su tutto $\mathbb{R}$ con tutte le derivate fino all'ordine k continue)?

9. Sia

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 6\sin(x^4) + \arctan(x^2)\log(\cos x).$$

Quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$?