

Esercizi sulle serie

1. Si studi il carattere delle seguenti serie (specificando in caso di convergenza se si tratta di convergenza assoluta):

$$\begin{array}{llll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^3}{2^n}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+7n+12}, & \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+5) \tanh(n^2)}{3^n}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{1/n}}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n n!}{n^n (2+7^n)}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{1/n^2}), & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}{n + \sqrt{n}}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\pi)^n}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n + 2 \log n}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{1 - \tanh n} - \frac{1}{e^2} \sqrt[n]{4} \right), & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{n+1} - 1)}{n}, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n}. \end{array}$$

2. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali tali che

$$\{b_n\} \text{ è monotona e infinitesima e } a_n \sim b_n \text{ per } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

(i) Si dimostri che, se $b_n \neq 0$ e $\frac{a_n}{b_n}$ è monotona definitivamente, allora $\sum (-1)^n a_n$ converge.

(ii) Si può concludere che $\sum (-1)^n a_n$ converge sotto la sola ipotesi (1)?

Suggerimenti.

(i) Si scriva $(-1)^n a_n = (-1)^n b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1 \right) + (-1)^n b_n$.

(ii) Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

3. Per ciascuna delle seguenti serie, si stabilisca se è assolutamente convergente, semplicemente ma non assolutamente convergente o non convergente:

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^5(n\pi)}{n^{1/5} \log n}, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n n^{-2}}{n+4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(\frac{1}{n^2})) (1 + \cosh(\frac{1}{n^2}))}{\sqrt{n}}, & \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log(\cosh n)}{\log(\sinh n)}. \end{array}$$

4. Si stabilisca per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n+1}$$

converge.

5. Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

- (i) Per ogni $n \geq 2$, sia $S_n = \sum_{k=2}^n \log \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$ la somma parziale n -esima. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$,

$$S_{2n} = \log \left(1 + \frac{1}{2n} \right), \quad S_{2n+1} = 0.$$

- (ii) Si verifichi che la serie converge e si calcoli la sua somma.

6. Per quali valori del parametro reale α la seguente serie è convergente:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n + n^2 (1 - \cos(\pi n))}.$$