Esercizi sugli integrali

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando opportunamente le risposte (per giustificare la falsità di un'affermazione si richiede di esibire un opportuno controesempio; per giustificare la validità di un'affermazione si richiede di dimostrarla facendo eventualmente riferimento a teoremi noti):

(i) Se $|f|$ è integrabile allora f è integrabile.

(ii) Se f è integrabile, $f \geq 0$ in $[a,b]$ e $f > 0$ in un numero finito di punti, allora $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

(iii) Se f è continua, $f \geq 0$ ed esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) > 0$, allora $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

(iv) Se $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, allora esiste $[c,d] \subset [a,b]$ tale che $\inf\limits_{[c,d]} f > 0$.

2. Si calcolino i seguente integrali

$$\int_0^\pi \sin x \, \log \sqrt{1+\cos^2 x}\; dx, \qquad \int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\; dx,$$

$$\int_1^2 \sqrt{4x - 3 - x^2}\; dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\log((1+\sin x)^{\sin x})}{\tan x}\; dx,$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\; dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}\; dx.$$

3. Si calcolino i seguente integrali indefiniti

$$\int \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{\sin^2 x + \cos^4 x}\; dx, \qquad \int \log^2 x \, dx,$$

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10}\, dx, \qquad \int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + 3}{x^2+1}\; dx,$$

$$\int x^2 e^x \sin x \, dx, \qquad \int \frac{\arctan x}{x^2}\; dx.$$

4. Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin^2 t - \cos t}\; dt,$$

si determini $F''(0)$.

5. Si determini lo sviluppo di McLaurin del terzo ordine della funzione

$$F(x) = \int_0^x \left(1+t^2\right) e^{\arctan t}\; dt.$$

6. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \int_0^x e^t \log(1+t)\; dt}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2}\; dt - x}{x^3}.$$