

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata della prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^3 e^n + 2n}{1 + 2n^2 + n^3 e^{n+1}}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n+1} \left(-\frac{3^3}{2^5}\right)^n; \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{4^n}.$$

Risposte: a) divergente; b) convergente; c) divergente.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare il valore di due (e non più di due) tra i seguenti limiti.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + 3x^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{3x + x^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{3x + \tan \frac{1}{x}}.$$

Risposte: a) 1; b) 0; c) $\frac{1}{3}$.

Esercizio 3. (5 punti) Per due (e non più di due) delle seguenti funzioni, si determinino i **valori** di minimo assoluto e di massimo assoluto nell'intervallo $[-2, 2]$:

$$\text{a) } f(x) = |x - |x - 1||, \quad \text{b) } g(x) = |x^2 - |x||, \quad \text{c) } h(x) = |x - |x - |x||.$$

a) 0, 5, b) 0, 2, c) 0, 6.

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Dato $\lambda \in [0, +\infty)$, si definisca l'insieme

$$A_\lambda := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1, \operatorname{Im}(z) = \lambda \operatorname{Re}(z)\}.$$

(a) Si determini il numero degli elementi di A_λ al variare di $\lambda \in [0, +\infty)$.

(b) Se $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, si determini il modulo di z_1 , dove z_1 è l'unico elemento di $A_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Risposta: (a) L'equazione $|z - 2| = 1$ descrive una circonferenza centrata nel punto 2 di raggio 1. L'equazione $\operatorname{Im}(z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ determina una retta passante per l'origine con coefficiente angolare $\lambda \geq 0$. Se $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, la retta è tangente alla circonferenza. Pertanto: se $\lambda > \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'insieme A_λ è vuoto; se $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'insieme A_λ contiene un unico elemento; se $\lambda < \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'insieme A_λ è costituito da due elementi.

(b) Sia z_1 l'unico elemento di $A_{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Indicati con P_1 e P_2 rispettivamente l'origine e il punto 2, il triangolo $P_1 P_2 z_1$ è rettangolo. L'ipotenusa ha lunghezza 2, il cateto $P_2 z_1$ ha lunghezza 1. Di conseguenza, il cateto $P_1 z_1$ ha lunghezza $\sqrt{3}$, che coincide con il modulo di z_1 .

Esercizio 5. (6 punti)

a) Si determini il valore del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tale per cui la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{sia continua su tutto } \mathbb{R}.$$

b) Per tale a si determini l'espressione esplicita della primitiva Φ di f su $\mathbb{R}$ tale che $\Phi(0) = 0$.

c) Si calcoli l'integrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Risposte: a) Per la gerarchia degli infiniti

$$\text{se } x \rightarrow 0^+, \quad \frac{3}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \sim \frac{3}{e^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow 0; \quad \text{se } x \rightarrow 0^-, \quad \frac{3}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \sim \frac{3}{e^{-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow 0.$$

Quindi f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0$. b) Se $x \neq 0$ con la sostituzione $z = e^{\frac{1}{x}}$, $dz = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ abbiamo

$$\int \frac{3}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[\int \frac{-3}{(1+z)^2} dz \right]_{z=e^{\frac{1}{x}}} = \frac{3}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + C.$$

Indichiamo con Φ la primitiva di f su $\mathbb{R}$ tale che $\Phi(0) = 0$, cioè $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$. Se $x > 0$ $\Phi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^x f(t) dt = \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0$. Se $x < 0$ $\Phi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_{\varepsilon}^x f(t) dt = \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{3}{1+e^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 3$. Quindi

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 3 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

c) Per il teorema fondamentale del calcolo

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \Phi(1) - \Phi(-1) = \frac{3}{1+e} - \frac{3}{1+e^{-1}} + 3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{1+e} - \frac{e}{1+e} + 1 \right) = \frac{6}{1+e}$$

Esercizio 6. (6 punti) Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo $f_0(x) = e^{-1/x^2}$.

- (a) Si dimostri che f_0 può essere prolungata ad una funzione continua f definita su $\mathbb{R}$, e si calcolino le prime due derivate di f in $x_0 = 0$.
- (b) Si dimostri che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio P_k tale che $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x^2}$ per ogni $x \neq 0$.
- (c) Calcolare tutti i coefficienti del polinomio di Taylor di f di grado 10, centrato in $x_0 = 0$.

Soluzione: (a) Si definisca $f(0) = 0$. Per $x \neq 0$ risulta $f'(x) = (2/x^3)e^{-1/x^2}$. Quindi $f'(0) = f''(0) = 0$. (b) Il caso $k = 0$ è evidente. Se la formula vale per un certo k , allora $f^{(k+1)}(x) = e^{-1/x^2} \left(\frac{2}{x^3} P_k(1/x) - \frac{1}{x^2} P'_k(1/x) \right)$, e i termini tra parentesi sono chiaramente polinomi valutati in $1/x$. (c) Dalla formula del punto (b) segue che $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 10$.