

Esercizi sugli integrali impropri

1. Per ciascuno dei seguenti integrali impropri si stabilisca se è convergente o non convergente:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{(x-2) \log(e^{5x} + 2 + x)}{(1 + \cos x + x^4)} dx, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 + \cos x}{3 + x^2 \sqrt{|x|}} dx, & \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2(2 + \sqrt{x})} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 + \sin^4(x^2)}{(2 + |x|^{\frac{7}{10}})^{\frac{2}{5}}} dx, & \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^{7/2}}{|x-1|^{9/2}} dx, & \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^4}{|x-1|^{9/2}} dx, \\ \int_{-\infty}^{-2} \frac{(x^4 + 7) \tanh(-3x)}{(x^4 - 1 + 7x)|x-4|^{1/7} \log^4(|x|)} dx. \end{aligned}$$

2. Si stabilisca per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^\alpha(x+2)} dx$$

converge.

3. Si studi la funzione

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1 + t \log t} dt$$

discutendone in particolare i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti, il segno, la continuità e la derivabilità, la monotonia e l'esistenza di punti di massimo o minimo relativi o assoluti.

4. Si studi la funzione

$$F(x) = \int_{1/2}^x \frac{1}{t \sqrt{|\log t|}} dt$$

discutendone: dominio naturale, limiti agli estremi del dominio e asintoti, segno, continuità e derivabilità, monotonia ed esistenza di punti di massimo o minimo relativi o assoluti, convessità ed esistenza di eventuali punti di flesso:

5. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando opportunamente le risposte (per giustificare la falsità di un'affermazione si richiede di esibire un opportuno controesempio; per giustificare la validità di un'affermazione si richiede di dimostrarla facendo eventualmente riferimento a teoremi noti).

- (i) Se f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$ e $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \geq 0$, allora f^2 è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$.
- (ii) Se f è positiva e integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$ allora esiste $R > 0$ tale che f è decrescente in $[R, +\infty)$.
- (iii) Se l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge ed esiste $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, allora $L \neq 0$.
- (iv) Se f è localmente integrabile e se l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge, allora l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.