

ESPERIENZA INTRODUTTIVA GRAVITÀ - PENDOLO SEMPLICE

a.a. 2024/25

PREMESSA

Studiare un pendolo semplice significa innanzi tutto osservare il fenomeno. Alcune delle domande che lo studente si dovrebbe porre durante l'esperienza sono, ad esempio:

- Come si descrive il moto di un pendolo? Da che grandezze fisiche dipende?
- Che assunzioni stiamo facendo se assumiamo che si possa descrivere come un moto armonico semplice ed esprimiamo il periodo del pendolo solo in funzione della lunghezza del pendolo e dell'accelerazione di gravità?
Quanto è importante l'ampiezza massima dell'oscillazione?
- È possibile ricavare una misura dell'accelerazione di gravità utilizzando un pendolo semplice? Come fare per ottenere un risultato accurato?
Con che precisione possiamo misurare il periodo del pendolo con un cronometro manuale? Quali sono le incertezze dominanti? Si tratta di errori di tipo casuale?
- Alla fine dell'esperienza ci si potrebbe domandare: sapremmo costruire un pendolo che batte il secondo? Che precisione avrebbe? Che limiti avrebbe?

INTRODUZIONE –Richiami di meccanica–

Il pendolo semplice è un sistema ideale formato da una massa puntiforme m sospesa ad un filo di lunghezza l , inestensibile e privo di massa, vincolato a muoversi attorno ad un punto fisso. Se il pendolo viene spostato di un angolo θ dalla posizione di equilibrio e quindi abbandonato, sotto l'azione della forza di gravità esso oscilla in un piano verticale ed il suo moto è periodico. Se θ è sufficientemente piccolo affinché valga l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0$$

che descrive un'oscillazione armonica di periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Utilizzando questa relazione è possibile ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g partendo dalla misura della lunghezza l del pendolo e del suo periodo di oscillazione T .

SCOPO DELL' ESPERIENZA

Si vuole **determinare l'accelerazione di gravità g** da un insieme di misure del periodo e della lunghezza del pendolo. Con la strumentazione a disposizione la lunghezza del pendolo può essere variata a piacere.

Una prima parte di questa esperienza introduttiva è dedicata ad evidenziare la presenza degli errori casuali, attraverso una serie di misure ripetute del periodo, allo scopo di chiarire, **verificare e applicare alcune delle leggi della statistica** studiate.

SVOLGIMENTO DELL' ESPERIENZA

PARTE A – studio degli errori di misura–

Si costruisca un pendolo semplice di **lunghezza fissata** a piacere.

- Si misurino la **lunghezza del pendolo l** , la **massa m** del piombino sospeso ed il suo **diametro d** . Si provi a ripetere le misure più di una volta e si verifichi se i risultati sono sempre uguali o no. L'incertezza da attribuire a tali misure è quella relativa alla sensibilità dello strumento di misura?

Utilizzando il cronometro, si misuri, mantenendo costante la lunghezza del pendolo, il valore del **periodo T** del pendolo. Si usi un angolo θ_{max} piccolo. Si ripeta la misura almeno 100 volte. Si raccolgano i dati della misura di T in una **tabella**.

Si determini la **media aritmetica del periodo, la deviazione standard e l'errore standard della media**.

Si suddividano le misure in un numero opportuno di intervalli (ad esempio intervalli ampi circa $\frac{1}{2}$ deviazione standard) e si riportino le misure in un istogramma su carta millimetrata.

Si **scriva** la funzione densità di probabilità di **Gauss** che ci si aspetta possa descrivere i dati raccolti e la si **confronti graficamente** con l'istogramma delle misure, **disegnandola sovrapposta all'istogramma**.

L'istogramma evidenzia la presenza di possibili errori sistematici?

Si determini l'accordo tra l'istogramma e la funzione di Gauss tramite il test del χ^2 (in caso di mancanza di tempo il calcolo può essere fatto a casa).

PARTE B – misura di g

In questa seconda parte si fanno misure del periodo in corrispondenza di **diversi valori della lunghezza del pendolo**. Si deve cambiare in modo significativo la lunghezza del pendolo, ad esempio tra circa 20 cm e circa 150 cm.

B.1) Senza cambiare la lunghezza del pendolo si ripeta la determinazione del periodo misurando, invece che la singola oscillazione completa, **il tempo Δt necessario perché il pendolo effettui 10 oscillazioni complete**. Si ripeta la misura di Δt almeno una decina di volte. Si raccolgano i dati in una tabella. Si ricavi il periodo come $T = \Delta t / 10$. Si determini la media aritmetica, la deviazione standard e l'errore standard della media di T ottenuto in questo modo.

Si confronti il valore del *periodo medio* ottenuto da queste misure con quello ottenuto dell'oscillazione singola (punto A). Si confronti la *deviazione standard* su T ottenuta con le 10 oscillazioni con quella ottenuta dalle misure dell'oscillazione singola e **si commentino** le eventuali differenze tra i risultati (ricordarsi di propagare le incertezze: se $T = \Delta t / 10$ sarà $\sigma_T = \sigma_{\Delta t} / 10$).

Ci si aspettava una differenza tra i due metodi di misura del periodo medio?

Ci si aspettavano una differenza tra le deviazioni standard?

Si cambi la lunghezza del pendolo e si ripetano le misure, usando la tecnica delle 10 oscillazioni, per diversi valori della **lunghezza l** . Si raccolgano dati per **almeno 4 o 5 lunghezze** diverse del pendolo (variando per esempio tra circa 30 e 150 cm). Per ciascuna lunghezza si ripeta la misura di Δt almeno una decina di volte. Si raccolgano i dati in una tabella. Si ricavi il periodo come $T = \Delta t / 10$ e si determini la media aritmetica del periodo, la deviazione standard e l'errore standard della media.

B.2) Si studi la relazione tra periodo medio e lunghezza:

si costruisca un primo **grafico** in cui si riportano i valori del periodo T in funzione della lunghezza l , un secondo grafico in cui si riportano i valori di T^2 in funzione di l , e un terzo grafico con T in funzione di l ma usando una carta (o scala) logaritmica.

B.3) Considerando una relazione lineare (ad esempio T verso $l^{1/2}$), si determini la miglior retta che approssima i dati utilizzando il metodo dei **minimi quadrati**. Si ricavi il valore di **g dal coefficiente angolare della retta**.

Si ricavi il valore dell'**incertezza** su g e si confronti il risultato ottenuto con il valore atteso $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

PARTE C – studio degli errori sistematici

Nella parte precedente si è assunto che il sistema in studio fosse un pendolo semplice ideale. Non è detto che ciò sia vero nella situazione sperimentale in esame.

Si prendono allora in considerazione diversi aspetti del fenomeno che si erano precedentemente trascurati, cercando di stabilire se determinano effetti importanti rispetto le misure che si sono fatte, oppure se sono effettivamente trascurabili.

Nel caso in cui gli effetti non siano trascurabili, il valore di g che si è determinato precedentemente non è accurato. È necessario determinare una correzione corrispondente e valutare l'errore sistematico ad essa associato.

C.1) Approssimazione di piccole oscillazioni.

Il valore dell'angolo θ_{max} usato nelle oscillazioni era effettivamente piccolo?

Se θ_{max} non è sufficientemente piccolo perché valga l'approssimazione $\sin \theta_{max} \approx \theta_{max}$, il periodo può essere espresso come:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$$

dove T_0 è il periodo corrispondente ad oscillazioni con un angolo infinitesimo.

Quale ampiezza di oscillazione è stata usata nelle misure della parte B? Per tale valore quanto differisce T da T_0 ? È una differenza significativa rispetto l'errore statistico sul periodo? Se è significativa correggere il valore di g ottenuto precedentemente.

C.2) Approssimazione di massa puntiforme.

La massa sospesa è di dimensione finita, e nel misurare la lunghezza del pendolo, si sarà tenuto conto della distanza l del suo centro di massa dal punto di sospensione.

Se consideriamo la massa non puntiforme il pendolo diventa un pendolo fisico il cui periodo è dato (per una massa sferica) da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}}$$

dove I è il momento d'inerzia: $I = M l^2 + 2/5 M r^2$, M è la massa della sfera ed r è il suo raggio. Determinare la differenza tra i periodi calcolati con le due formule per i valori di M , r , l usati nell'esperimento. Se la differenza risulta significativa correggere il valore di g ottenuto precedentemente.

C.3) Approssimazione di filo inestensibile.

C.4) Resistenza dell'aria.

C.5) Approssimazione di massa del filo nulla.