

ESPERIENZA INTRODUTTIVA

VISCOSITÀ – LEGGE DI STOKES

a.a. 2024/25

***NB: ricordarsi di pulire le sferette (basta lavarle sotto l'acqua corrente dopo averle messe nel colino) dopo averle usate e PRIMA di riporle nelle loro scatolette!!
Altrimenti le sferette si arrugginiscono!!***

PREMESSA

Studiare il moto di una sferetta che cade in un fluido significa innanzi tutto osservare il fenomeno. Alcune delle domande che lo studente si dovrebbe porre durante l'esperienza sono, ad esempio:

- Che cos'è la viscosità di un fluido? Da che cosa dipende?
- Che tipo di moto ci si aspetta per la caduta di una sferetta nel vuoto? E quando invece è immersa in un fluido viscoso?
Quali sono le forze in gioco? Da che grandezze fisiche dipende la velocità raggiunta dalla sferetta? Cosa cambia se si cambiano la massa della sferetta o le sue dimensioni? Possiamo verificare se si tratta di un moto uniforme?
- È possibile ricavare una misura della viscosità della glicerina?
Come fare per ottenere un risultato accurato? Con che precisione possiamo misurare la velocità con cui si muovono le sferette utilizzando un cronometro manuale? Quali sono le incertezze dominanti? Si tratta di errori di tipo casuale?
- Alla fine dell'esperienza ci si potrebbe domandare: con la strumentazione a disposizione sarebbe possibile ottenere una buona misura di viscosità anche per un fluido diverso, per esempio per l'acqua?

INTRODUZIONE –Richiami di meccanica–

La viscosità di un fluido esprime l'attrito che il fluido presenta al moto di un oggetto in esso e dipende dalle caratteristiche del fluido. La viscosità di un fluido varia notevolmente con la **temperatura** del fluido.

Un metodo per misurare il coefficiente di viscosità η di un liquido consiste nel misurare la **velocità con cui una sferetta cade nel liquido**, sotto l'azione della forza peso.

La sferetta che si muove nel liquido, in regime laminare, è sottoposta a tre forze: la forza peso, la spinta di Archimede e la resistenza del mezzo. Proiettando lungo la direzione della forza peso (asse verticale), la risultante delle forze vale:

$$R = F_{\text{peso}} - F_{\text{Arc}} - F_{\text{res}} \quad (1)$$

con $F_{\text{peso}} = mg = V\rho_{\text{sferetta}} g$, $F_{\text{Arc}} = V\rho_{\text{liquido}} g$, dove m è la massa della sferetta, ρ_{sferetta} e ρ_{liquido} sono rispettivamente la densità della sferetta e quella del liquido, V è il volume della sferetta e g è l'accelerazione di gravità. Per sferette con piccola velocità vale la legge di Stokes, secondo la quale la resistenza del mezzo è data da:

$$F_{\text{res}} = 6\pi \eta r v \quad (2)$$

dove r è il raggio della sferetta, v la sua velocità ed η è il **coefficiente di viscosità**.

Quando la risultante R delle forze agenti sulla sferetta diventa nulla, la sferetta si muove di **moto uniforme e la sua velocità è detta velocità limite**. Da (1)+(2) si ricava:

$$v_{\text{limite}} = r^2 2 g (\rho_{\text{sferetta}} - \rho_{\text{liquido}}) / (9 \eta) \quad (3)$$

Si vede quindi che la velocità è proporzionale al quadrato del raggio della sferetta ed è inversamente proporzionale alla viscosità.

L'unità di misura della viscosità nel S.I. è $\text{N s/m}^2 = \text{Pa s}$, l'unità di misura equivalente nel sistema cgs è dyne s/cm^2 e si chiama *poise*: $1 \text{ poise} = 0.1 \text{ Pa s} = 0.1 \text{ N s / m}^2$.

N.B. La viscosità di un fluido varia notevolmente con la **temperatura** del fluido. Nel nostro caso la glicerina è in equilibrio termico con l'ambiente. È pertanto importante tenere sotto controllo eventuali **variazioni di temperatura dell'ambiente** durante lo svolgimento dell'esperienza e **non** combinare tra loro misure effettuate a temperature diverse. *Prendere nota della temperatura ambiente prima di iniziare il lancio delle sferette.* Un altro parametro che influenza il valore della viscosità è l'eventuale presenza di una certa percentuale di acqua disciolta nella glicerina. Tenerlo presente al momento di confrontare il risultato dell'esperimento con la viscosità prevista per la glicerina.

SCOPO DELL' ESPERIENZA

L'esperienza consiste nel **determinare la viscosità della glicerina** utilizzando un cilindro graduato riempito di glicerina in cui si fanno cadere sferette di acciaio calibrate, di diametri compresi tra 2 e 6 mm.

Una prima parte dell'esperienza introduttiva è dedicata ad **evidenziare la presenza degli errori casuali**, attraverso una serie di misure ripetute dei tempi di caduta delle sferette, allo scopo di chiarire, verificare e applicare alcune delle leggi della statistica studiate.

SVOLGIMENTO DELL' ESPERIENZA

Per misurare la viscosità η della glicerina, utilizzando la (3), è necessario effettuare le misure di r , ρ_{sferetta} , ρ_{liquido} e v_{limite} .

Quando la sferetta ha raggiunto la velocità limite, essa si muove di **moto uniforme**. La velocità limite allora si ricava allora misurando il tempo t che la sferetta impiega a percorrere una distanza s prefissata (distanza compresa tra due tacche sul cilindro):

$$v_{\text{limite}} = s / t.$$

Nel caso della glicerina, per sferette di qualche mm di diametro, la velocità è molto prossima a quella limite dopo che la sferetta ha percorso pochi mm.

PARTE A – studio degli errori di misura–

Si prendano inizialmente le sferette di **diametro 3 mm**.

Si misurino la **massa** m delle sferette (con una bilancia) ed il loro **diametro** d .

Si ripetano le misure più volte e si verifichi se i risultati sono sempre uguali o no. L'incertezza da attribuire a tali misure è quella relativa alla sensibilità dello strumento di misura?

Si facciano cadere le sferette di diametro 3 mm nel cilindro contenente la glicerina e si misuri il tempo impiegato a percorrere una distanza di *10 cm*.

Si ripeta la misura almeno 100 volte. Si raccolgano i dati dei tempi di caduta in una **tabella**. Si determini la **media aritmetica dei tempi di caduta**, la **deviazione standard** e l'**errore standard della media**.

Si calcoli la velocità media di caduta delle palline ed il suo errore.

Si suddividano le misure fatte in un numero opportuno di intervalli (ad esempio ampi circa $\frac{1}{2}$ deviazione standard) e si riportino in un istogramma su carta millimetrata.

Si scriva la funzione densità di probabilità di **Gauss** che ci si aspetta descrivere i dati raccolti e la si confronti graficamente con l'istogramma delle misure, **disegnandola sovrapposta all'istogramma**.

L'istogramma evidenzia la presenza di possibili errori sistematici?

Si determini l'accordo tra l'istogramma e la funzione di Gauss tramite il test del χ^2 (in caso di mancanza di tempo il calcolo può essere fatto a casa).

PARTE B – misura del coefficiente di viscosità

In questa parte si fanno misure di tempi di caduta utilizzando sferette di cinque diametri diversi (2, 3, 4, 5 e 6 mm), si verifica la legge di Stokes e si misura la viscosità della glicerina.

Per ciascun tipo di sferette (**diametri** $d = 2, 3, 4, 5$ e 6 mm) si effettuino almeno una decina di lanci e si misuri il tempo di caduta delle sferette su una distanza di **20 cm**. Si raccolgano i dati in una tabella. Per ciascun tipo di sferette si determini la media aritmetica del tempo di caduta, la deviazione standard e l'errore standard della media. Si calcoli la velocità media di caduta delle palline ed il suo errore con queste nuove misure.

Per le sferette da 3 mm (già usate in precedenza per le 100 misure) si confronti la *velocità media* ottenuta nelle misure di caduta su 10 cm con quella ottenuta sui 20 cm, analogamente si confronti la *deviazione standard* ottenuta nelle misure sui 10 cm con quella ottenuta sui 20 cm.

Ci si aspettava una differenza tra le velocità medie ottenute dalle misure sulle due distanze? Ci si aspettavano una differenza tra le deviazioni standard?

Si studi la relazione (3) tra velocità limite v_{limite} e raggio della sferetta r :
si costruisca un primo **grafico** in cui si riporta la velocità limite media in funzione di r (raggio della sferetta), un secondo grafico per la velocità limite media in funzione di r^2 , e un terzo per la velocità limite media in funzione di r su carta (o scala) logaritmica.

Dopo aver linearizzando la relazione (3), si determini la **miglior retta** che approssima i dati utilizzando il metodo dei **minimi quadrati** (ad esempio usare il grafico di velocità verso r^2). Si determini il **coefficiente angolare** della retta e il suo errore.

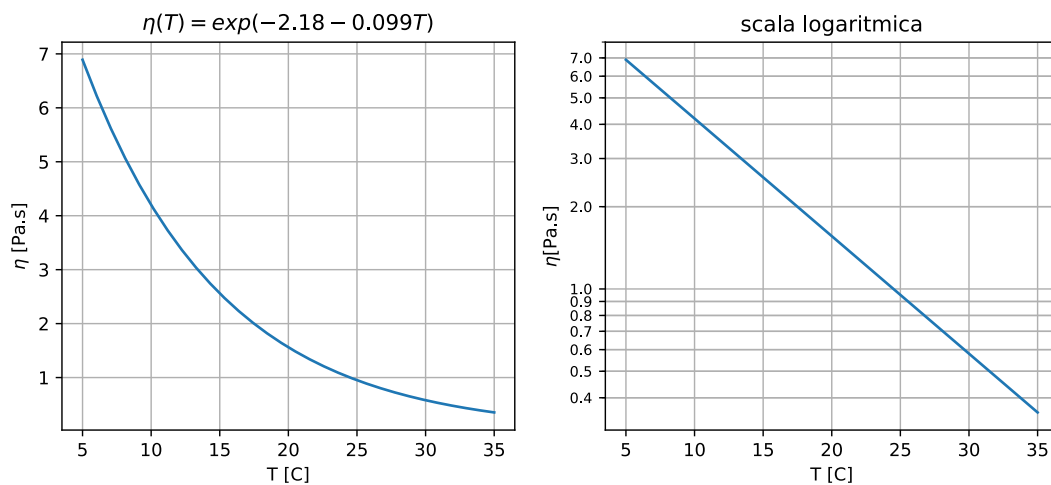
Si deve ora ricavare il valore della **viscosità η** della glicerina **dal coefficiente angolare della retta**.

A questo scopo è necessario conoscere anche le densità ρ_{sferetta} , ρ_{liquido} . Si ricavi la **densità** delle sferette dalla misura del volume e del peso ottenuto con una bilancia (per migliorare la precisione della misura si possono pesare insieme più sferette dello stesso diametro). Si misuri la **densità della glicerina** dal rapporto massa su volume, utilizzando per la misura del volume un matraccio tarato.

In alternativa, se c'è tempo, si può utilizzare per entrambe le misure densità la bilancia idrostatica (per il procedimento vedere nell'appendice).

Utilizzando il coefficiente angolare della retta, ricavare il valore della viscosità η della glicerina e l'incertezza corrispondente.

Confrontare il valore della viscosità ottenuto con quello previsto per glicerina pura, alla temperatura del laboratorio, che potete ricavare dal grafico qui sotto.



Parte C – OSSERVAZIONI

- Si è operato in regime di velocità limite?

Verificarlo sperimentalmente, ad esempio misurando la velocità delle sferette nella fase iniziale e in quella finale della caduta. In alternativa ricavare una stima per la velocità risolvendo l'equazione del moto della sferetta nel liquido.

- Che rilevanza può avere che la pallina cada nel centro del cilindro o vicino ai bordi?

- Che rilevanza può avere che la pallina cada il più vicino possibile alla superficie libera del liquido o a una certa distanza da essa?

Osservare il liquido: che effetto può avere la presenza di eventuali bollicine nel liquido?

APPENDICE

MISURA DELLA DENSITÀ DI UN LIQUIDO CON LA BILANCIA IDROSTATICA

La bilancia idrostatica permette di misurare la densità di un liquido utilizzando il principio di Archimede.

Se un solido viene pesato ponendolo prima in aria e poi immerso nel liquido, la forza totale cui è soggetto differisce nei due casi per la diversa spinta archimedeica esercitata rispettivamente dall'aria e dal liquido. Si ha infatti

$$F_{\text{aria}} = V \rho_{\text{solido}} g - V \rho_{\text{aria}} g \quad (1)$$

$$F_{\text{liquido}} = V \rho_{\text{solido}} g - V \rho_{\text{liquido}} g \quad (2)$$

dove V è il volume del solido e ρ_{solido} , ρ_{aria} e ρ_{liquido} sono le densità rispettivamente del solido, dell'aria e del liquido.

Se sono noti il volume del corpo immerso e la densità dell'aria, è possibile ricavare da (1)+(2) la densità del liquido, che risulta:

$$\rho_{\text{liquido}} = \rho_{\text{aria}} + (F_{\text{aria}} - F_{\text{liquido}}) / (V g) \quad (3)$$

Se quando si è pesato il solido in aria si è azzerata la bilancia (tasto “tara”) allora quando si pesa il solido immerso nel liquido la bilancia fornisce direttamente

$$F_{\text{liquido}} - F_{\text{aria}}.$$

La **densità dell'aria** dipende dalla temperatura e dalla pressione, secondo la relazione:

$$\rho_{\text{aria}} = [1.2926 / (1 + 0.003661 t)] p / 760 \quad [\text{kg/m}^3]$$

dove t è la temperatura in gradi Celsius e p è la pressione in mmHg.

Se non è noto il volume del solido immerso, si può effettuare una seconda pesata col solido immerso in acqua distillata, e utilizzare (1)+(2) assumendo nota la densità dell'acqua distillata per ricavare

$$\rho_{\text{liquido}} = \rho_{\text{aria}} + \left(\rho_{\text{acqua}} - \rho_{\text{aria}} \right) \left(\frac{F_{\text{liquido}} - F_{\text{aria}}}{F_{\text{acqua}} - F_{\text{aria}}} \right)$$

NOTA: il pescante deve essere sempre ben **pulito e asciutto**. Ogni volta che si cambia il liquido in cui si introduce bisogna fare attenzione a come si inserisce ed estrae dal cilindro corrispondente, facendolo scolare, **lavarlo e asciugarlo**. Anche alla fine dell'esperimento lasciarlo pulito.