

## Esercizi tratti da temi d'esame

1. Sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}, \quad f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}} + e^{\frac{3}{x}}}$$

e sia  $D = \{f(x) \mid x \in E\}$  la sua immagine.

(a) Determinare l'estremo inferiore dell'insieme  $D$ . È anche un minimo?

(b) Determinare l'estremo superiore dell'insieme  $D$ . È anche un massimo?

2. Si discuta, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \alpha^{2n} + \alpha n^{3\alpha}).$$

3. È definita per ogni  $x \geq 0$  la funzione  $f(x) = \int_x^{x+1} (e^{-t^2} - 1) dt$ .

(a) Se esiste, si determini il valore del  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(b) Se esiste, si determini il valore del  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{e^{-(1+x)^2}}$ .

4. Si consideri la funzione  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $F(x) = \int_2^x e^{-t^4} \sqrt[3]{t} dt$ .

(a) Si studi la monotonia di  $F$ , evidenziando gli eventuali punti di minimo e di massimo.

(b) Si dimostri che  $F$  possiede un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$ .

(c) Si determini il polinomio di Taylor di secondo grado di  $F$  centrato nel punto  $x_0 = 2$ .

5. Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}}$ .

(a) Si determini l'insieme  $E$  dei punti in cui è derivabile e in tali punti si determini la derivata.

(b) Si determinino eventuali punti di massimo o minimo relativo specificando se sono anche assoluti.

(c) Si determini se la funzione data è uniformemente continua e se è lipschitziana.

6. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si consideri  $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) dx$ .

(a) Calcolare i valori di  $I_0$  e di  $I_1$ .

(b) Provare per induzione che, per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $I_n = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}$ .

(c) Usando l'uguaglianza  $\ln(I_n) = \sum_{j=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{2j+1}\right)$ , valida per ogni  $n \geq 1$ , calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(I_n) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$$