

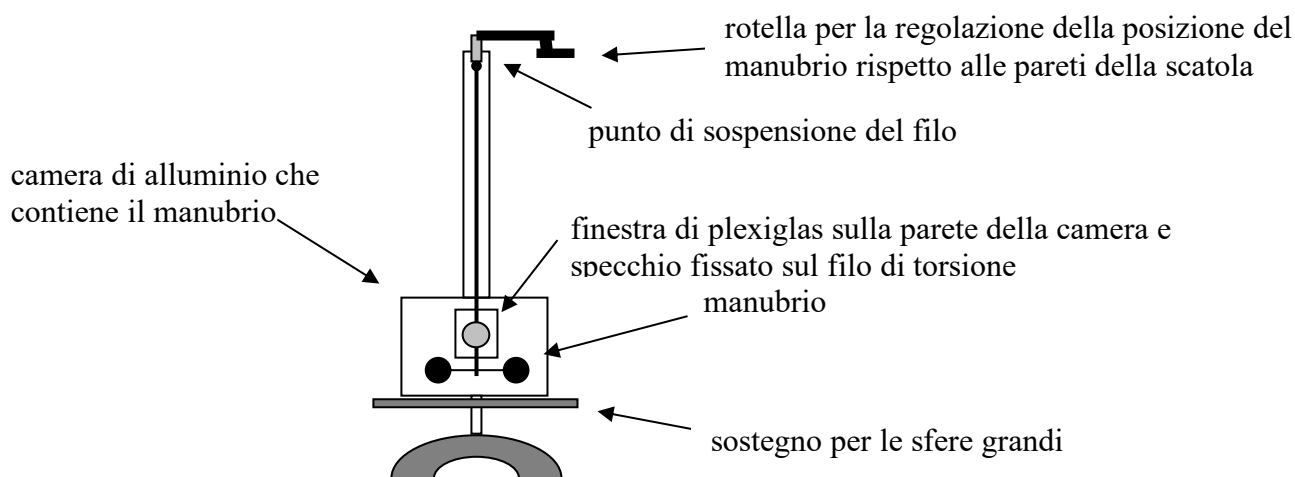
MISURA DI G CON LA BILANCIA DI CAVENDISH

ATTENZIONE: l'apparato è molto delicato, **NON** toccare la regolazione del filo di sospensione (manopola in alto) o del laser se non in presenza di un assistente del laboratorio. Ripristinare le condizioni di equilibrio perduto può richiedere diverse ore e impedire la realizzazione dell'esperimento.

DESCRIZIONE DELL'APPARATO SPERIMENTALE

La bilancia di torsione di Cavendish consente di misurare la forza di attrazione gravitazionale tra due masse e di ricavare il valore della **costante di Gravitazione Universale G**. Il valore estremamente piccolo $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ci dice quanto delicato sia arrivare a misurare questa costante.

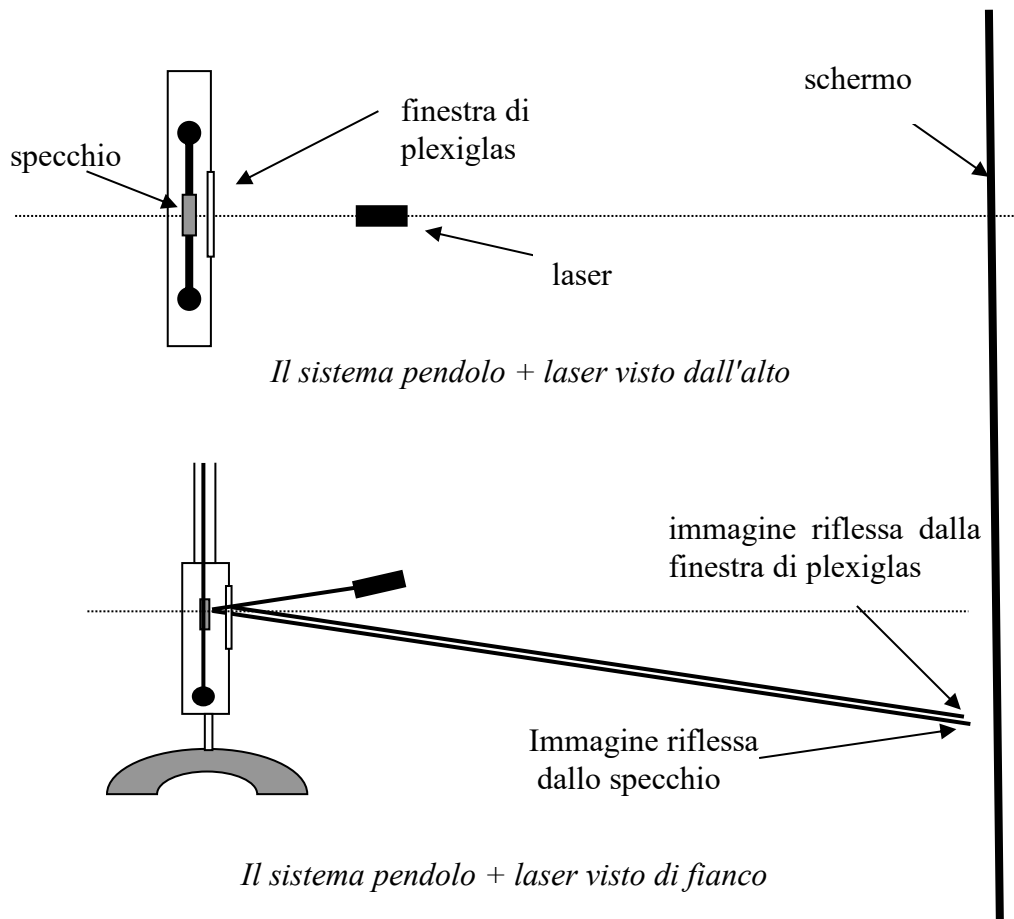
Per poterlo fare si usa una bilancia di torsione. La bilancia consiste in un manubrio composto da un'asta sottile ai cui estremi sono fissate due sferette di uguale massa e dimensione, il manubrio è sospeso in posizione orizzontale mediante un filo fissato al suo baricentro. Il pendolo così realizzato è contenuto in una scatola protettiva costituita da un tubo verticale innestato su una camera che contiene il manubrio. Il filo è fissato a un perno sull'estremo superiore del tubo cilindrico. L'intero apparato è sostenuto mediante un treppiede che consente di regolarne la verticalità.



Il pendolo di torsione

Il perno su cui è fissato il filo del pendolo può essere ruotato, in questo modo è possibile posizionare il manubrio parallelamente alla camera che lo contiene. Quando il manubrio è parallelo alla camera è parallelo alla finestra di plexiglas della camera.

Sul filo è fissato un **piccolo specchio**. Se si posiziona un laser di fronte all'apparato in modo che il raggio luminoso incida sullo specchio attraverso la finestra di plexiglas, con un piccolo angolo di inclinazione rispetto la verticale, su uno schermo posto di fronte all'apparato compariranno due punti luminosi allineati verticalmente: uno è l'immagine del laser riflessa dallo specchio, l'altra è l'immagine del laser riflessa dalla finestra di plexiglas.



Un sostegno rotante orizzontale impernato sull'asse del tubo contenente il pendolo consente di posizionare due sfere di identica dimensione e massa di fronte alle sferette del manubrio in modo che i centri delle sferette e i centri di queste sfere più grandi appartengano allo stesso piano orizzontale e che le sfere grandi siano diametralmente opposte rispetto al manubrio e disposte in modo simmetrico rispetto ad esso.

Le sfere grandi esercitano sul manubrio una coppia – dovuta all'attrazione gravitazionale tra sfere grandi e sfere piccole – che produce una torsione del filo. Nota la costante elastica di torsione del filo e misurato l'angolo di rotazione del manubrio rispetto alla posizione che esso assume quando le sfere grandi sono lontane (cioè quando non si trovano sull'apposito sostegno) si ricava il valore della coppia esercitata sul manubrio dalle sfere grandi e quindi il valore della costante di Gravitazione Universale. L'angolo di rotazione del manubrio può essere misurato osservando – sullo schermo - lo spostamento dell'immagine del laser riflessa dallo specchio (lo specchio infatti è solidale con il filo e quindi ruota assieme al manubrio).

MISURA DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

1) **Verifica dell'allineamento dell'apparato.** All'inizio dell'esperimento le sfere grandi devono trovarsi lontane dal manubrio (cioè non devono essere poggiate sul sostegno rotante) e si deve osservare se

- l'apparato sia allineato verticalmente (cioè che la scatola che contiene il pendolo sia allineata verticalmente con il filo del pendolo).
- il manubrio sia parallelo alla camera che lo contiene (e quindi che lo specchio sia parallelo alla finestra di plexiglas): in posizione di equilibrio le immagini proiettate sullo schermo dal laser e prodotte dalla riflessione sullo specchio e dalla riflessione sulla finestra di plexiglas devono essere allineate verticalmente.

In caso contrario consultare un assistente di laboratorio.

2) **Misura del periodo di oscillazione del pendolo**

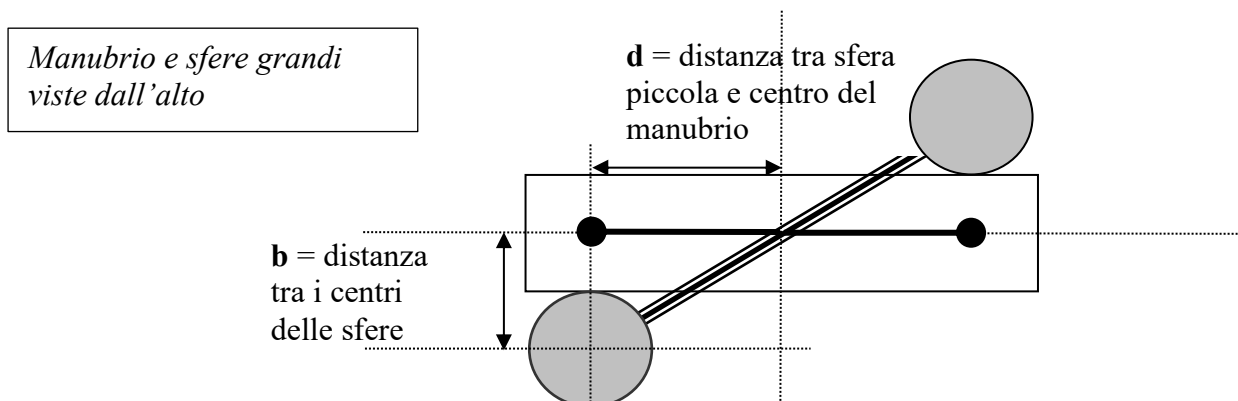
Durante l'oscillazione libera del pendolo si misura il **periodo T** di oscillazione per poter determinare la **costante elastica di torsione del filo κ** dalla relazione:

$$T^2 = 4 \pi^2 I / \kappa$$

dove I è il momento di inerzia del manubrio $I = 2 m (d^2 + 2/5 r^2)$. Si consiglia di misurare più periodi consecutivi e di iniziare a contare il tempo quando l'immagine del raggio laser si trova circa al centro della regione di oscillazione.

3) **Posizionamento delle sfere grandi sul sostegno**

Le sfere grandi devono essere poggiate delicatamente sul sostegno (evitando di sollecitare il pendolo che altrimenti si metterebbe a oscillare ulteriormente) mentre questo è posto in posizione perpendicolare rispetto la cameretta. Il sostegno deve poi essere ruotato in modo che le sfere grandi tocchino le pareti della camera. In tale posizione la distanza b tra i centri delle sfere grandi e quella delle sfere piccole è nota.



$d = 50 \text{ mm}$
 $b = 46.5 \text{ mm}$
 $m = \text{massa sfere piccole} = (38.3 \pm 0.2) \text{ g}$
 $M = \text{massa sfere grandi} = (1500 \pm 10) \text{ g}$
 $r = \text{raggio sfere piccole} = 9.53 \text{ mm}$
 $R = \text{raggio sfere grandi} = 31.9 \text{ mm}$
 massa manubrio $\cong 2 \text{ m}$ (la massa dell'asta e dello specchio sono trascurabili)

4) Misura dell'angolo di rotazione

Quando le sfere grandi vengono poggiate sul sostegno e portate in posizione come descritto nel punto precedente, il manubrio è soggetto a una coppia che viene controbilanciata dalla forza elastica di torsione: il manubrio si mette a oscillare compiendo oscillazioni smorzate. L'oscillazione del pendolo è rilevabile sullo schermo come un'oscillazione del punto luminoso prodotto dalla riflessione del laser sullo specchio. Il manubrio raggiungerà infine una posizione di equilibrio ruotata di un **angolo θ** rispetto alla posizione che aveva in assenza di forze.

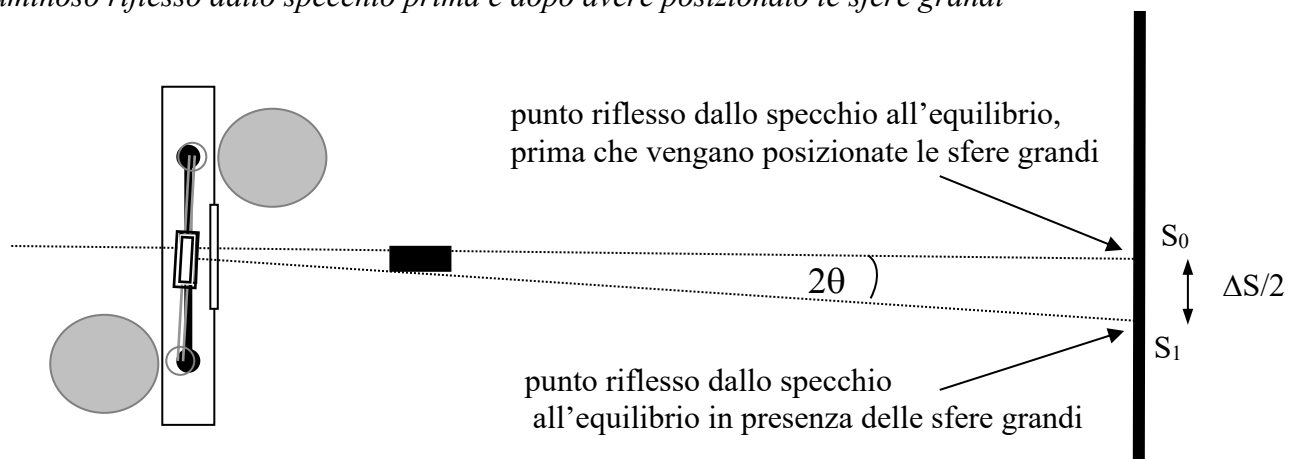
Andare alla NOTA SULLE OSCILLAZIONI DEL PENDOLO per una discussione sul raggiungimento della posizione di equilibrio.

In corrispondenza della posizione di **equilibrio** il raggio riflesso dallo specchio forma un **angolo 2θ** rispetto la posizione che aveva in assenza delle sfere grandi (per la legge della riflessione, quando uno specchio ruota di un angolo θ il raggio riflesso ruota di un angolo 2θ). Lo **spostamento $\Delta S/2$** della posizione del punto luminoso rispetto alla posizione che esso aveva prima di posizionare le sfere grandi è dato da $\Delta S/2 = (S_0 - S_1)$, come indicato in figura. Dalla misura di $\Delta S/2$ si ricava il valore dell'angolo θ di cui il manubrio è ruotato:

$$2\theta \cong \tan 2\theta = \Delta S / 2 L$$

dove L = distanza specchio – schermo, deve essere misurata con un metro a nastro.

Sistema pendolo + laser visto dall'alto. S_0 e S_1 sono le due posizioni del punto luminoso riflesso dallo specchio prima e dopo avere posizionato le sfere grandi



5) Misura di θ ruotando di 180° le sfere grandi

Si ruota il supporto delle sfere grandi di 180° portandole di nuovo a toccare la parete della camera e si ripetono le misure di cui al punto 4. In questo caso il raggio riflesso produrrà sullo schermo un'immagine S_2 dal lato opposto di S_0 rispetto S_1 . Si ottiene una nuova misura di θ da $\Delta S/2 = S_0 - S_2$.

In realtà si vede che **non è necessario determinare la posizione iniziale dell'immagine del laser S_0 , poiché si può ricavare direttamente $\Delta S = |S_2 - S_1|$.**

La conoscenza di S_0 permette però di verificare se la sua posizione è intermedia tra S_1 ed S_2 e quindi verificare l'allineamento della bilancia rispetto lo schermo.

6) Determinazione di G

In presenza delle sfere grandi, il manubrio raggiunge la posizione di equilibrio quando la coppia dovuta all'attrazione gravitazionale è uguale e contraria alla coppia dovuta alla forza elastica di torsione del filo. Consideriamo in prima approssimazione solo la forza di attrazione gravitazionale tra ciascuna sfera piccola e la sfera grande ad essa più vicina. Si ha:

$$\tau_{\text{gravitazionale}} = 2 F_{\text{gravitazionale}} d = 2 (G m M / b^2) d$$

$$\tau_{\text{torsione}} = - \kappa \theta$$

Si può quindi ricavare il valore di G dai valori di κ e θ ricavati ai punti 2) e 4-5).

Tuttavia, con questa formula non si tiene conto dell'effetto di attrazione gravitazionale tra ciascuna sfera piccola e la sfera grande più lontana, che non è affatto trascurabile. Va tenuta in considerazione se si vuole descrivere con completezza il sistema, e ottenere un valore di G accurato.

Bisogna considerare che l'attrazione della sfera grande più lontana fa sì che la forza gravitazionale totale sulla sfera piccola sia in realtà **inferiore** a quella stimata utilizzando l'equazione qui sopra.

Ricavare dalla geometria del problema la formula necessaria per tenere in conto dell'attrazione di entrambe le sfere e utilizzare tale formula contenente la correzione per il proprio risultato su G .

NOTA SULLE OSCILLAZIONI DEL PENDOLO

- Inizialmente le oscillazioni del manubrio sono di grande ampiezza e possono portare il manubrio ad **urtare le pareti** della camera (in tal caso le oscillazioni non si smorzano). In tal caso rivolgersi a una assistente di laboratorio perché aiuti a smorzare le oscillazioni per mezzo delle due viti che si trovano sulla base della camera.

Girando le viti in senso orario all'interno della camera si alzano due blocchetti con una scanalatura a U che vanno a fermare i bracci del manubrio. Sbloccando poi molto lentamente il manubrio (ruotando le viti in senso antiorario) si può ottenere che l'ampiezza di oscillazione del pendolo sia sufficientemente piccola da non fare urtare le sfere del manubrio contro la parete.

- Poiché il periodo di oscillazione del pendolo è lungo, può essere poco pratico attendere fino al raggiungimento della posizione di equilibrio del manubrio. Tuttavia, è possibile fare una buona stima della posizione di equilibrio per **estrapolazione**, a partire dall'osservazione delle oscillazioni smorzate del pendolo.

Per poter fare questo è necessario **prendere nota delle posizioni del punto luminoso** in corrispondenza dei massimi dell'oscillazione. Si deve poi costruire il grafico delle oscillazioni smorzate del punto luminoso riflesso dallo specchio mettendo in ascisse il tempo e in ordinate la posizione del punto luminoso, rispetto a un qualunque punto di riferimento. Nel grafico schematico qui sotto è riportato un esempio relativo a misure fatte in presenza delle masse grandi.

Per determinare la posizione di S_1 si possono **interpolare** graficamente i punti di massimo e minimo, alla ricerca dell'intersezione, oppure si può calcolare il punto

medio con la **formula ricorsiva**:
$$x_m = \frac{\frac{x_1 + x_3}{2} + x_2}{2}$$

