

CARATTERIZZAZIONE DI UNA MOLLA E STUDIO DEL MOTO ARMONICO

INTRODUZIONE

Sotto l'azione di una forza un corpo si deforma. La forza e la deformazione sono dette elastiche se terminata l'azione della forza il corpo riassume la forma che aveva precedentemente. Per una forza elastica la deformazione prodotta nel corpo risulta proporzionale all'intensità della forza stessa (legge di Hooke).

Si consideri una molla appesa ad un estremo, fisso, e all'altro estremo si sospenda una massa M . Sia x_0 l'allungamento della molla rispetto la sua posizione di riposo. In condizione di equilibrio statico la forza di richiamo della molla bilancia la forza peso e risulta:

$$Mg = k x_0 \quad (1)$$

dove k è una costante, detta costante elastica della molla, che dipende dal materiale e dalle caratteristiche geometriche della molla.

Se la massa M sospesa alla molla viene spostata dalla sua posizione di equilibrio (sia x l'allungamento totale), su di essa agirà una forza totale pari a $F' = -kx + Mg$ risultante tra la forza di richiamo della molla e la forza peso.

L'equazione del moto è:

$$M \, d^2x/dt^2 = -kx + Mg$$

cioè:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}(x - x_0) = 0$$

che descrive un **moto armonico semplice**, con oscillazioni attorno la posizione di equilibrio $x_0 = Mg/k$. Lo spostamento è descritto da:

$$x(t) - x_0 = A \sin(\omega t + \phi)$$

La pulsazione del moto è $\omega^2 = k/M$ ed il periodo vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (2)$$

Questa soluzione vale per molle ideali, cioè prive di massa, ossia quando $M \gg m$ massa della molla. Altrimenti il periodo risulta dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m/3}{k}} \quad (3)$$

PROCEDURA SPERIMENTALE

A) Verifica della legge di Hooke e determinazione **statica** della costante elastica della molla k .

Si sceglie una molla e si fissa un suo estremo al supporto verticale, all'altro estremo e si sospendono masse di valori diversi (misurati con la bilancia), via via crescenti. Si misura l'elongazione (allungamento) della molla direttamente con un'asta graduata oppure utilizzando il sensore di posizione ad ultrasuoni, acquisito tramite PC. Il sensore fornisce la *distanza dal sensore dell'estremo inferiore del supporto masse*, appeso alla molla. Per ottenere l'elongazione della molla si misura dapprima la distanza tra sensore e supporto vuoto, successivamente si sottrae questo valore alla distanza tra sensore e supporto+massa.

La legge di Hooke implica una proporzionalità diretta tra il valore della massa sospesa e quello dell'**elongazione** della molla. Il rapporto tra le due quantità deve rimanere costante e dipende dalla costante elastica della molla. Per verificare la legge si costruisce un **grafico** in cui si riportano i valori delle *elongazioni della molla* in funzione dei valori della *massa sospesa sul supporto* (solo la massa posizionata sul supporto, poiché il valore di x_0 è stato determinato con il supporto appeso).

Utilizzando opportunamente la relazione (1) si determina dal coefficiente angolare della retta che meglio approssima i dati sperimentali da questo il valore di k , ed il suo errore. Si assuma $g = 9.81 \pm 0.01 \text{ m/s}^2$.

B) Determinazione **dinamica** della costante elastica della molla k

Sospesa una massa alla molla spostarla delicatamente dalla sua posizione di equilibrio e lasciare il sistema libero di oscillare. Utilizzare il sensore di posizione per misurare lo spostamento $x(t)$ della massa oscillante dalla sua posizione di equilibrio.

Si osservi il grafico dello spostamento $x(t)$ e lo si confronti con quanto previsto per un moto armonico. Il programma di acquisizione permette di calcolare le derivate numeriche delle grandezze misurate e pertanto di ottenere i valori della velocità in funzione del tempo $v(t)$ e dell'accelerazione $a(t)$. Osservare le caratteristiche dei grafici di $v(t)$ e di $a(t)$ e verificare che corrispondano alle aspettative.

Utilizzando il grafico di $x(t)$ in funzione di t si ricavi il valore del periodo di oscillazione T dalla distanza tra N massimi successivi (in tal modo si riduce di un fattore N l'errore su T).

Ripetere le misure per diversi valori della massa sospesa alla molla.

Si riportino in **grafico** i valori del *periodo al quadrato* (T^2) in funzione della *massa totale sospesa* M e, utilizzando la relazione (2), si effettui un'interpolazione lineare per determinare il valore di k ed il suo errore.

(In questo caso la massa M da considerare è la massa totale sospesa, che include la massa del supporto.)

Confrontare le misure di k ottenute coi due metodi (statico e dinamico) e verificarne la compatibilità.

OSSERVAZIONI

- Pesare la molla sulla bilancia. Se la correzione dovuta alla massa m della molla appare significativa ricavare k usando la relazione (3) invece che la (2).
- Che precisione si è ottenuta sulle misure degli allungamenti? Da che cosa risulta dipendere? A che tipo di errore sistematico è soggetta (si pensi al funzionamento del sensore)?
- Quando la molla oscilla si osservino i grafici di velocità ed accelerazione in funzione del tempo e anche in funzione della posizione.
- Per un dato valore della massa sospesa, e misurato il valore di k della molla, è possibile definire le grandezze **energia cinetica ed energia potenziale** e costruirne il grafico in funzione del tempo, così come quello dell'**energia meccanica totale**.
Conviene assumere come riferimento per la misura della coordinata spaziale la posizione di equilibrio della molla (non allungata, né compressa) in corrispondenza della quale l'energia potenziale elastica della molla è nulla.
I grafici hanno l'andamento che si poteva prevedere in base alle leggi della dinamica?

C) Determinazione **statica** della costante elastica equivalente per due molle collegate in **serie** e in **parallelo**

Questa parte può essere svolta misurando le costanti elastiche col metodo statico oppure quello dinamico, oppure, se si ha il tempo, con entrambi.

Si determinino le costanti elastiche k_1 e k_2 di due molle, separatamente. Successivamente si colleghino le due molle **in serie** e si misuri la costante elastica del sistema k_{eq} , utilizzando lo stesso metodo.

Per due molle in serie la costante equivalente k_{eq} è data dalla relazione

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Confrontare il valore di k_{eq} ottenuto sperimentalmente con quello ricavato dalla formula utilizzando i valori misurati di k_1 e k_2 .

Con l'apparato a disposizione, per determinare la costante elastica equivalente di un sistema di due molle collegate in parallelo, si devono utilizzare due molle della stessa lunghezza e con la stessa costante elastica k_l . Si colleghino in parallelo le due molle e si determini la costante elastica equivalente del sistema k_{eq} .

La costante equivalente k_{eq} per due molle identiche **in parallelo** è data dalla relazione

$$k_{eq} = k_1 + k_1 = 2 k_1$$

Confrontare il valore di k_{eq} ottenuto sperimentalmente con quello ricavato dalla formula usando il valore k_l . Discutere i risultati determinando le possibili sorgenti di errore dell'esperimento.