

MISURE DELL' ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g

In questo esperimento si vuole misurare l'accelerazione di gravità g . Diversi sono i modi possibili. Qui si considerano le oscillazioni di un particolare pendolo fisico, detto pendolo di Kater, e la caduta libera in aria di palline d'acciaio. Alla fine degli esperimenti si devono confrontare i risultati ottenuti coi due metodi, e commentare pregi e difetti dei due diversi metodi.

1) PENDOLO REVERSIBILE DI KATER

INTRODUZIONE

Consideriamo un pendolo fisico che oscilli sospeso alternativamente in due diversi punti, indicati con 1 e 2, non coincidenti col suo baricentro G. Il periodo del pendolo che oscilla sospeso nel punto 1 è dato da:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}}$$

dove l_1 indica la lunghezza ridotta del pendolo, I_1 è il momento di inerzia del pendolo per rotazioni attorno l'asse passante per il punto 1, m la massa del pendolo e h_1 è la distanza tra il punto 1 e il baricentro. Per il teorema di Steiner si ha: $I_1 = I_G + mh_1^2$, con I_G momento di inerzia per oscillazioni attorno all'asse che passa per il baricentro.

Analogamente il periodo del pendolo sospeso nel punto 2 sarà dato da:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{mgh_2}}$$

con $I_2 = I_G + mh_2^2$.

Se si trova una configurazione per cui i periodi T_1 e T_2 risultano uguali, significa che $l_1 = l_2$ cioè la lunghezza ridotta del pendolo è la stessa nelle due situazioni. Detta l tale lunghezza si ha:

$$l = l_1 = \frac{I_1}{mh_1} = \frac{I_G + mh_1^2}{mh_1} \quad \text{e} \quad l = l_2 = \frac{I_2}{mh_2} = \frac{I_G + mh_2^2}{mh_2}$$

da cui si ricava:

$$l m h_1 = I_G + m h_1^2 \quad \text{e} \quad l m h_2 = I_G + m h_2^2$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$l m(h_1 - h_2) = m(h_1^2 - h_2^2) = m(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)$$

Assumendo $h_1 \neq h_2$ e dividendo entrambi i membri per $m(h_1 - h_2)$ si ottiene infine:

$$l = h_1 + h_2 \quad \text{e quindi} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}}$$

Pertanto, dati **due punti di sospensione** in corrispondenza dei quali si ha lo **stesso periodo di oscillazione**, la lunghezza ridotta del pendolo risulta uguale alla somma delle distanze dei due punti dal baricentro.

Il periodo dipende solo dalla somma $h_1 + h_2$ e non è necessario conoscere i singoli valori di h_1 ed h_2 per ricavare g .

Il pendolo di Kater è un pendolo fisico reversibile, in cui la posizione del baricentro, compresa tra due coltelli, può essere variata con continuità muovendo una massa mobile. Nella situazione di uguaglianza tra i periodi misurati per sospensione ai due coltelli, la lunghezza ridotta, pari a $h_1 + h_2$, corrisponde alla distanza tra i coltelli, ed è quindi conosciuta con gran precisione. Il pendolo di Kater consente quindi una misura molto precisa dell'accelerazione di gravità.

SVOLGIMENTO DELL'ESPERIENZA

Il pendolo di Kater è costituito da un'asta rigida su cui scorrono due masse ($m_A = 1000$ g e $m_B = 1400$ g) fornita di due coltelli, in posizione simmetrica, che fungono da punti di sospensione 1 e 2 del pendolo. La **distanza tra i coltelli D** è nota con precisione dal costruttore, nel nostro caso $D = 99.4$ cm.

Spostando le due masse lungo l'asta si viene a spostare la posizione del baricentro G del pendolo. Per la simmetria del pendolo, il baricentro viene comunque a trovarsi sempre sulla retta congiungente i due coltelli 1 e 2.

Per ciascuna posizione delle masse si misura il periodo di oscillazione da entrambi i coltelli fino a trovare la configurazione in corrispondenza della quale i periodi di oscillazione del pendolo, relativi ai due assi di sospensione, sono uguali tra loro ($T_1 = T_2 = T^*$). Ciò significa che si è giunti alla situazione in cui la distanza tra i coltelli D coincide con la lunghezza ridotta del pendolo. Allora vale la relazione:

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{D}{g}}} \quad (1)$$

La misura di questo valore del periodo, T^* , permette quindi di ricavare con precisione il valore di g .

Per evitare una lunga procedura di aggiustamenti successivi della posizione delle masse, non è necessario raggiungere esattamente la posizione per cui i due periodi sono identici: si misurano T_1 e T_2 in corrispondenza di alcune posizioni delle masse, a cavallo di quella cercata, e si determina per interpolazione il valore di T^* .

Convien inoltre lasciare fissa la massa m_E esterna ad entrambi i coltelli, posizionando il suo centro a circa 10-15 cm dal coltello più vicino, e muovere l'altra (m_I), partendo da una distanza di pochi centimetri dal coltello vicino alla massa esterna, ed allontanandola progressivamente a passi di 2-3 cm.

Si costruisce un grafico in cui si mette sulle ascisse la distanza x della massa mobile m_I da uno dei due coltelli e in ordinate si pongono i periodi di oscillazione T_1 e T_2 , relativi ai due assi di sospensione, misurati a tale distanza.

Le due curve $T_1(x)$ e $T_2(x)$ ad un certo punto **si devono intersecare**. Ci saranno cioè due posizioni di m_I , che chiamiamo x_a e x_b , tra le quali si verifica l'intersezione: **per una posizione, x_a , $T_1(x_a) > T_2(x_a)$, mentre per l'altra, x_b , sarà $T_1(x_b) < T_2(x_b)$** . Se ciò non succede è necessario cambiare la posizione della massa fissa m_E e ripetere la procedura.

Quando si è determinata l'esistenza di un punto di intersezione si può procedere a spostare m_I entro le due posizioni che definiscono l'incrocio, con passi più piccoli, per avvicinarsi il più possibile alla posizione che rende uguali i due periodi.

Per diminuire l'errore sulla misura del periodo, si ricava il suo valore dalla misura del tempo impiegato a compiere N oscillazioni complete ($N \sim 10-20$). In alternativa, è possibile utilizzare il cronometro collegato alla fotocellula, effettuando 10-20 misure di ogni periodo e calcolandone la media. L'incertezza su ciascuna misura del periodo sarà allora l'errore standard della media.

Nei pressi del punto d'intersezione le due curve $T_1(x)$ e $T_2(x)$ possono essere approssimate con due rette. Il valore cercato di T^* è dato dal punto di intersezione delle due rette, che può essere calcolato come:

$$T^* = \frac{T_2(x_a)T_1(x_b) - T_1(x_a)T_2(x_b)}{T_1(x_b) - T_2(x_b) - T_1(x_a) + T_2(x_a)}$$

dove x_a e x_b sono le due posizioni misurate più vicine all'intersezione.

In alternativa, si possono costruire due grafici, nei pressi del punto di intersezione, uno della differenza tra i periodi in funzione della distanza $\Delta T(x) = T_1(x) - T_2(x)$ e uno della media dei due periodi in funzione della distanza $T_m(x) = (T_1(x) + T_2(x))/2$ e si interpolano linearmente.

L'interpolazione della funzione $\Delta T(x)$ permette di determinare il valore x_0 per cui i periodi sono uguali che corrisponde a $\Delta T = 0$. In corrispondenza di tale valore x_0 si prende per T^* il valore della media tra T_1 e T_2 : $T^* = T_m(x_0)$.

Avendo ricavato T^* , utilizzare il valore noto di D per determinare il valore di g e la sua incertezza.

NB. In realtà esistono due punti di intersezione tra le curve $T_1(x)$ e $T_2(x)$, entrambi corrispondono allo stesso valore di T^* . Non è necessario determinare anche la seconda intersezione.

OSSERVAZIONI

Il moto del pendolo è armonico ed il suo periodo è dato dalla (1) solo quando vale l'approssimazione $\sin \theta_{max} \approx \theta_{max}$. Se θ_{max} non è sufficientemente piccolo, il periodo risulta meglio approssimato dall'equazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{g}} \left(1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$$

Il pendolo deve quindi compiere piccole oscillazioni. Quale angolo θ_{max} si è utilizzato? Calcolare la correzione al periodo corrispondente, valutare se è significativa rispetto le incertezze di misura ottenute ed eventualmente applicarla ai dati ricavati precedentemente.

NOTA SULL'USO DEL TIMER COLLEGATO ALLA FOTOCELLA

Dopo averlo acceso:

- con il primo pulsante "Select measurement" selezionare "Time"
- con il secondo pulsante "Select mode" selezionare "Pendulum"
- mettere in oscillazione il pendolo e utilizzare il terzo pulsante Start per far partire la misura di un periodo. Mentre il pendolo oscilla è possibile misurare diverse volte il periodo.

2) MOTO DI CADUTA LIBERA

INTRODUZIONE

Un grave che cade sotto la sola azione della forza peso si muove con accelerazione uniforme, pari all'accelerazione di gravità g .

Il moto uniformemente accelerato è descritto dalla legge oraria:

$$y(t) = y(0) + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

dove $y(t)$ indica la posizione al tempo t e v_0 la velocità iniziale.

È sempre possibile scegliere il punto di partenza come origine per la misura delle posizioni, in modo che $y(0) = 0$.

Si vuole fare una serie di misure della posizione y_i in funzione del tempo t_i , da cui si possono determinare i valori di v_0 e g interpolando la relazione con una parabola.

Nel caso in cui si misurassero i tempi di caduta dal punto di partenza della sferetta si avrebbe $v_0 = 0$.

SVOLGIMENTO DELL' ESPERIENZA CON L'APPARATO A 6 FOTOCELLE

Sei fotocelle allineate verticalmente sono fissate ad un tubo di acciaio fissato al muro. Una pallina di acciaio viene sospesa sopra la prima fotocella e può esser fatta cadere rimuovendo un bastoncino di metallo che funge da fermo. Un cronometro collegato alle fotocelle misura i tempi di passaggio della pallina (che cadendo oscura le fotocelle). La prima fotocella funge da *starter* e le altre misurano il tempo di passaggio della pallina rispetto la prima fotocella.

La misura dei tempi di caduta della pallina a diverse distanze dal punto di partenza permette di costruire la legge oraria.

Procedura per i lanci della pallina:

- Prima di lanciare la pallina schiacciare lo starter del cronometro.
- Far cadere la pallina rimuovendo il fermo.
- Dopo qualche secondo dal passaggio della pallina compariranno sul display i tempi registrati dalle cinque fotocelle. Compaiono 7 cifre, poiché la sensibilità del cronometro è di $1 \mu s = 10^{-6} s$, la prima cifra fornisce i secondi, la seconda i decimi di secondo ecc.
- Se la traiettoria della pallina non fosse perfettamente verticale il suo passaggio potrebbe non essere registrato da alcune (ultime) fotocelle. Ripetere il lancio e se il problema persiste farsi aiutare da un responsabile di laboratorio a controllare l'allineamento del sistema.

Per una data posizione delle fotocelle si ripetono diversi lanci della pallina, si registrano i tempi di passaggio da ciascuna fotocella $t_1, t_2, \dots, t_5$ e si calcolano i tempi medi $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_5$.

La distanza delle fotocelle dallo starter si misura con un metro a nastro, ottenendo le posizioni $y_1, y_2, \dots, y_5$.

- **La fotocella *starter* non deve mai essere spostata.** Le altre fotocelle possono essere spostate per raccogliere ulteriori misure di tempi di caduta ad altre distanze dallo starter.

Si costruisce un grafico delle posizioni y_i in funzione dei tempi medi di caduta $\bar{t}_i$.

Si **interpola la relazione $y(t)$ lasciando liberi i parametri v_0 e g .**

Ricavato il valore di g , e la sua incertezza, confrontarlo con il valore previsto e con quanto ottenuto con il pendolo di Kater.