

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli il valore della derivata prima di due (e non più di due) delle seguenti funzioni nel punto $x_0 = 2$:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\cos(3x)}{x^2 + 4}; \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{x}e^{x^2-1}; \quad \text{c) } h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \log|x^3 - 3|.$$

Risposte: a) $\frac{-6\sin(6)-\cos(6)}{16}$; b) $\frac{7}{4}e^3$; c) $\frac{12}{5}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 \cdot \log 5$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il **valore** di due (e non più di due) delle seguenti serie.

$$\text{a) } \sum_{n=3}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{(n+1)^3+1} - \frac{n}{n^3+1} \right]; \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^3+2}.$$

Risposte: a) $-\frac{3}{28}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $+\infty$.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali (eventualmente impropri):

$$\text{a) } \int_{-1}^2 |x| \, dx, \quad \text{b) } \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx, \quad \text{c) } \int_{-1}^1 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx.$$

a) $\frac{5}{2}$, b) 1, c) $\frac{\pi}{2}$.

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

- (a) Si trovino le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $w^2 - 2iw + 8 = 0$.
- (b) Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $e^{2z} - 2ie^z + 8 = 0$.
- (c) Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme $B = \{|z| : z \in \mathbb{C} \text{ e } e^{2z} - 2ie^z + 8 = 0\}$.

Risposta: (a) $4i$ e $-2i$; (b) Con $z = x + iy$, da $e^{x+iy} = 4i = e^{\log 4 + \frac{\pi}{2}i}$ si trova $z = \log 4 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$; Analogamente si hanno anche le soluzioni $z = \log 2 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$; (c) $\sup B = +\infty$ e $\inf B = \sqrt{\log^2 2 + \frac{\pi^2}{4}}$.

Esercizio 5. (6 punti)

(a) Al variare dei parametri reali a e b , si calcoli

$$L_{a,b} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} \cos x - 1 - ax - \frac{(a^2-1)x^2}{2} + b \left(\log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \right)}{x^3}.$$

(b) Se $b = o(a^3)$ per $a \rightarrow +\infty$, si calcoli $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{L_{a,b}}{a^3}$.

(c) Si determini una funzione f tale che $L_{a,f(a)} = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Risposte: (a) $L_{a,b} = \frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$; (b) $\frac{1}{6}$; (c) $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. (6 punti) Si consideri la funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = x + \int_0^x \log(1+t^2) \arctan(t^2) dt.$$

- (a) Si provi che F è dispari.
- (b) Si studi il segno della derivata prima e della derivata seconda di F .
- (c) Si provi che $F(x) = x + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Soluzione: (a) Usando il cambio di variabile $s = -t$ si deduce che

$$F(-x) = -x + \int_0^{-x} \log(1+t^2) \arctan(t^2) dt = -x - \int_0^x \log(1+s^2) \arctan(s^2) ds = -F(x),$$

da cui segue che F è dispari.

(b) Per il **Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**, si ha che

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 + \log(1+x^2) \arctan(x^2) \\ F''(x) &= 2x \left[\frac{\arctan(x^2)}{1+x^2} + \frac{\log(1+x^2)}{1+x^4} \right]. \end{aligned}$$

Quindi $F'(x) \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, da cui segue che F è strettamente crescente. Inoltre $F''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$ mentre $F''(x) < 0$ se e solo se $x < 0$: F è convessa su $(0, +\infty)$; F è concava su $(-\infty, 0)$.

(c) Si ha che $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, $F''(0) = 0$. Sviluppo di McLaurin con resto di Peano di F fino all'ordine 2:

$$F(x) = x + o(x^2)$$

per $x \rightarrow 0$.