Analisi Matematica I. Prova scritta del **24 aprile 2026**

Cognome: .... Nome: .... Matricola: ....

Consegnare *solo* il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si calcoli il valore della derivata prima di due (e non più di due) delle seguenti funzioni nel punto $x_0 = 2$:

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{\cos(3x)}{x^2+4}\,; \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x^2-1}\,; \qquad \text{c)}\quad h(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\log\left|x^3-3\right|\,.$$

Risposte: a) $\frac{-6\sin(6)-\cos(6)}{16}$; b) $\frac{7}{4}e^3$; c) $\frac{12}{5}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 \cdot \log 5$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determinino le soluzioni di due delle seguenti equazioni in campo complesso.

$$\text{a) } z^3 - 3z^2 + z - 3 = 0; \qquad \text{b) } |z| + z = 0; \qquad \text{c) } |z| + z\bar{z} + 1 = 0.$$

Risposte: a) 3, $-i$, i; b) $\{a + ib \colon a \leq 0,\ b = 0\}$; c) nessuna soluzione.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to+\infty} \left[\log\left(1+2\frac{e^x}{x}\right)\cdot\log\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]; \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+1)}{x+1}; \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}.$$

a) 3; b) $\sin 1$; c) -1.

Parte B

Esercizio 4. (6 punti)

(a) Dimostrare che, per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x^2)(n+x^2+1)}$ converge ad una somma finita $S(x)$.

(b) Si determini una formula esplicita per $S(x)$.

(c) Si discuta la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} S(x)\, dx$.

Risposta: (a) Si applica il criterio del confronto asintotico con una serie armonica generalizzata; (b) Si scompone in fratti semplici e si osserva che la serie è telescopica. La somma vale $S(x) = \frac{1}{x^2}$. (c) L'integrale è elementare, e vale $\frac{1}{n^2+n}$. La serie converge per confronto asintotico.

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \log(1+x^2)\arctan(x^2)$.

(a) Si dimostri che f ha un unico punto critico (cioè un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$) e si determinino gli intervalli di monotonia di f.

(b) Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la primitiva di f tale che $\varphi(0) = -1$. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = 0$.

(c) Si determini, al variare di $\alpha > 0$, il valore del limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^\alpha}}$.

Risposte: (a) Si ha che

$$f'(x) = 2x\left[\frac{\arctan(x^2)}{1+x^2} + \frac{\log(1+x^2)}{1+x^4}\right].$$

Per ogni $x \neq 0$, si ha che

$$\frac{\arctan(x^2)}{1+x^2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\log(1+x^2)}{1+x^4} > 0,$$

da cui segue che $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $f'(x) < 0$ se $x < 0$. Pertanto $x_0 = 0$ è l'unico elemento di $\mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$. Inoltre f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$.

(b) Si ha che $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Pertanto φ è strettamente crescente e di conseguenza il numero di soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = 0$ può essere o 0 o 1. Proviamo a determinare il limite di $\varphi(x)$ per $x \to +\infty$. Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-1 + \int_0^x f(t)dt\right).$$

Dato che $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$, l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge a $+\infty$, da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Allora esiste $\beta > 0$ tale che $\varphi(\beta) > 1$. Dato che φ è continua, il teorema degli zeri assicura che esiste almeno un elemento $\bar{x} \in [0, \beta]$ tale che $\varphi(\bar{x}) = 0$.

Quindi il numero di soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = 0$ è 1.

(c) Si ha che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x^\alpha}} = \lim_{x\to0^+} x^{4-\frac{\alpha}{2}} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \alpha < 8, \\ 1, & \text{se } \alpha = 8, \\ +\infty, & \text{se } \alpha > 8. \end{cases}$$

Esercizio 6. (6 punti)

(a) Si ricavi lo sviluppo di Taylor al terzo ordine centrato in $x = 0$ e con resto di Peano della funzione $f(x) = \dfrac{1+ax}{1+bx}$ dove a e b sono due parametri reali.

(b) Per quali valori di a e b il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - f(x)}{x^2}$ esiste finito?

(c) Per quali valori di a e b il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - f(x)}{x^3}$ esiste finito? Quanto vale tale limite?

Soluzione: (a) Per ricavare lo sviluppo di $f(x) = \frac{1+ax}{1+bx}$ al terzo ordine in $x = 0$, utilizziamo lo sviluppo della funzione binomiale:

$$\frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

Ponendo $u = bx$, otteniamo:

$$\frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + o(x^3)$$

Moltiplichiamo ora per il numeratore $(1 + ax)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+ax)\left(1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + o(x^3)\right) \\
&= 1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + ax - abx^2 + ab^2x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + (a-b)x - (ab - b^2)x^2 + (ab^2 - b^3)x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + (a-b)x - b(a-b)x^2 + b^2(a-b)x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

(b) Affinché il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-a+b)x + (\frac{1}{2} + ab - b^2)x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

esista finito, il termine di grado inferiore al numeratore (ovvero il coefficiente della x) deve annullarsi. Imponiamo quindi:

$$1 - a + b = 0 \implies a = b + 1.$$

Sotto questa condizione, il limite esiste ed è uguale al coefficiente del termine x^2. Quindi il limite è finito per ogni coppia (a, b) tale che $a = b + 1$.

(c) Affinché il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - f(x)}{x^3}$$

esista finito, devono annullarsi sia il coefficiente della x che quello della x^2. Dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 1 - (a-b) = 0 \\ \frac{1}{2} + b(a-b) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $a - b = 1$. Sostituendo nella seconda:

$$\frac{1}{2} + b = 0 \implies b = -\frac{1}{2}.$$

Trovato b, ricaviamo a:

$$a = b + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Sotto queste condizioni ($a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$), i primi due termini del numeratore scompaiono e il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{6} - b^2(a-b)\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = -\frac{1}{12}.$$

Quindi il limite è finito per $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$ cioè $f(x) = \frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$. Il valore del limite è $-\frac{1}{12}$.