

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini il polinomio di Taylor di terzo grado, centrato nel punto $x_0 = 0$, di due (e non più di due) delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = e^{2x} + \sin(2x); \quad \text{b) } g(x) = \log(1 + 3x) - \cos(2x); \quad \text{c) } h(x) = 2 \cos(2x) - \sin(x).$$

Risposte: a) $1 + 4x + 2x^2$; b) $-1 + 3x - \frac{5x^2}{2} + 9x^3$; c) $2 - x - 4x^2 + \frac{x^3}{6}$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali (eventualmente impropri):

$$a) \int_1^{49} \frac{\log(2 + \sqrt{x}) + 1}{\log 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx; \quad b) \int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx; \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^4} \cdot x dx.$$

Risposte: a) 30; b) $\frac{8}{5}\sqrt{3}$; c) $\frac{1}{6}$.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(3x))}{x \sin(2x)}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^3}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}.$$

$$\text{a) } -\frac{9}{4}; \text{ b) } \frac{1}{2}; \text{ c) } \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione reale di variabile reale definita da $f(x) = x \log^2(x)$.

- (a) Calcolare i limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Stabilire se la funzione ammette asintoti verticali o orizzontali e se è possibile prolungarla per continuità nel punto $x = 0$.
- (b) Calcolare la derivata prima f' e determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo o assoluto di f . Determinare infine l'immagine della funzione f .
- (c) Si stabilisca se la funzione f è uniformemente continua nell'intervallo $(0, 1]$ e nell'intervallo $[1, +\infty)$.

Risposte: (a) Si ha che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Di conseguenza f è prolungabile per continuità nell'origine ponendo $f(0) = 0$ e inoltre f non ammette asintoti verticali o orizzontali.

(b) Si ha che $f'(x) = (\log(x) + 2) \log(x)$. Pertanto f è crescente in $(0, e^{-2})$ e in $(1, +\infty)$, mentre f è decrescente in $(e^{-2}, 1)$. Inoltre $x = e^{-2}$ è punto di massimo relativo, $x = 1$ è punto di minimo relativo (anche assoluto, dato che $f(1) = 0$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$). Infine, dal teorema dei valori intermedi segue che l'immagine di f è $[0, +\infty)$.

(c) Intervallo $(0, 1]$: f si può estendere per continuità anche in 0; per il Teorema di Heine-Cantor, l'estensione continua di f è uniformemente continua su $[0, 1]$ e quindi f è uniformemente continua su $(0, 1]$.

Intervallo $[1, +\infty)$: la funzione non è uniformemente continua. Si prendano le successioni $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{\log^2(n)}$. Si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0$.

Esercizio 5. (6 punti) Sia $w_1 = 1 - i$ soluzione della seguente equazione di secondo grado nel campo dei numeri complessi

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0.$$

(a) Si determini la seconda soluzione w_2 .

(b) Si determini l'equazione dei punti $P = (x, y)$ del piano cartesiano associati al numero complesso $z = x + iy$ che soddisfano l'equazione

$$\left| \frac{z - w_1}{z - w_2} \right| = 1.$$

(c) Posto $w_3 = 1$, si determini l'area del triangolo di vertici w_1 , w_2 e w_3 .

Risposte: (a) Dividendo il polinomio dato per $z - (1 - i)$ si ottiene

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = (z - (1 - i))(z - (2 + 3i)),$$

quindi $w_2 = 2 + 3i$.

(b) L'equazione data è equivalente a $|z - w_1|^2 = |z - w_2|^2$. Cioè

$$\begin{aligned} 0 &= (z - w_1)(\bar{z} - \bar{w}_1) - (z - w_2)(\bar{z} - \bar{w}_2) \\ &= z\bar{z} - z\bar{w}_1 - w_1\bar{z} + w_1\bar{w}_1 - z\bar{z} + z\bar{w}_2 + w_2\bar{z} - w_2\bar{w}_2 \\ &= 2\operatorname{Re}(z\bar{w}_2 - z\bar{w}_1) + |w_1|^2 - |w_2|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}[z(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)] + |w_1|^2 - |w_2|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}[(x + iy)(1 - 4i)] + 2 - 13 \\ &= 2x + 8y - 11. \end{aligned}$$

Quindi il luogo dei punti è la retta $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{8}$.

(c) Poiché $w_1 = 1 - i$, $w_2 = 2 + 3i$, $w_3 = 1$, possiamo scegliere come base del triangolo il segmento tra w_1 e w_3 di lunghezza 1 con relativa altezza 1. Quindi l'area è $\frac{1}{2}$.

Esercizio 6. (6 punti)

- (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $a_n(\alpha) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\alpha}{n+1}$. Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha)$ al variare del parametro α . [si usi lo sviluppo di $\log(1+y)$ centrato in $y=0$]
- (b) Si determini il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n(1))^\beta$ al variare del parametro $\beta > 0$.
- (c) Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1) = 1 - \gamma$, dove $\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right)$.

Soluzione: (a) Analizziamo il comportamento asintotico del termine generale $a_n(\alpha)$ per $n \rightarrow \infty$. Dagli sviluppi in serie di Taylor,

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\alpha}{n+1} &= \frac{\alpha}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} a_n(\alpha) &= \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{1-\alpha}{n} + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1-\alpha}{n} + \frac{2\alpha-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Deduciamo che la serie converge se e solo se $\alpha = 1$.

(b) Sia data la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [a_n(1)]^\beta$. Si osservi che la funzione $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ è monotona decrescente e converge a zero per $x \rightarrow +\infty$. La successione $f(n)^\beta$ soddisfa alle condizioni di Leibniz quindi la serie è convergente per ogni $\beta > 0$.

(c) Posto $\alpha = 1$, esprimiamo la somma parziale N -esima S_N :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N a_n(1) = \sum_{n=1}^N \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^N [\log(n+1) - \log(n)] - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

La prima sommatoria è una somma telescopica, che si riduce a:

$$\sum_{n=1}^N [\log(n+1) - \log(n)] = \log(N+1) - \log(1) = \log(N+1)$$

Per la seconda sommatoria, effettuiamo un cambio di indice ponendo $k = n+1$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \right) - 1$$

Ricombiniamo i termini all'interno di S_N :

$$\begin{aligned} S_N &= \log(N+1) - \left[\left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} \right) - 1 \right] \\ &= 1 - \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \log(N+1) \right) \end{aligned}$$