

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini l'estremo superiore di due (e non più di due) dei seguenti insiemi:

$$\text{a) } \{-x^2 + 4x + 2 : x \in \mathbb{Q}\} ; \quad \text{b) } \{-x^2 - 6x + 1 : x \in \mathbb{N}\} ; \quad \text{c) } \{\operatorname{Im}(z) : (z - i)(\bar{z} + i) = 3, z \in \mathbb{C}\} .$$

Risposte: a) 6; b) 1; c) $1 + \sqrt{3}$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il carattere di due (e non più di due) tra le seguenti serie numeriche:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Risposte: a) divergente; b) convergente assolutamente; c) converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio 3. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti integrali:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \cos^2 x \, dx; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} \, dx; \quad \text{c) } \int_0^{\log 3} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx.$$

$$\text{a) } \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}; \text{ b) } 1 - 2 \log 2; \text{ c) } \frac{1}{4}.$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Sia data la funzione $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log(\cos x) + \frac{1}{2} \sin^2 x$.

- (a) Si determini lo sviluppo di Maclaurin della funzione $f(x)$ fino all'ordine 4 incluso, esprimendo il resto secondo Peano. Usando tale sviluppo si calcoli il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}$.
- (b) Al variare del parametro reale $\beta \in \mathbb{R}$, si analizzi la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{x^\beta} dx$.
- (c) Si dimostri che la funzione f , ristretta all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ è strettamente decrescente. Si deduca infine che, per ogni $t > 0$, l'equazione $f(x) = -t$ ammette un'unica soluzione in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Risposte: (a) Si ha che, per $x \rightarrow 0$, $\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$ e $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$. Pertanto:
 $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$. Il limite è dunque immediato: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = -\frac{1}{4}$.

(b) L'integranda $\frac{f(x)}{x^\beta}$ è una funzione continua nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{4}]$. L'unico punto critico in cui studiare l'integrabilità in senso improprio è l'origine $x = 0$. Sfruttando il comportamento asintotico di f ricavato nel punto precedente, sappiamo che per $x \rightarrow 0^+$ vale la relazione $f(x) \sim -\frac{1}{4}x^4$. Di conseguenza, l'intera funzione integranda si comporta asintoticamente, per $x \rightarrow 0^+$, come

$$\frac{f(x)}{x^\beta} \sim -\frac{1}{4} \frac{x^4}{x^\beta} = -\frac{1}{4} x^{\beta-4}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se

$$\beta - 4 < 1 \iff \beta < 5.$$

(c) Si ha che $f'(x) = -\tan x + \sin x \cos x = -\tan(x)(1 - \cos^2 x)$. Dato che $\tan(x) > 0$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $(1 - \cos^2 x) > 0$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, segue che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ e quindi f , ristretta all'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ è strettamente decrescente. Dato che f è continua in $x = 0$, segue che f , ristretta all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ è strettamente decrescente. Siccome $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$, l'immagine di $[0, \frac{\pi}{2})$ tramite f è l'intervallo $(-\infty, 0]$. Di conseguenza, dato che la restrizione di f è strettamente decrescente, segue che, per ogni $t > 0$, l'equazione $f(x) = -t$ ammette un'unica soluzione in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -1, \operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = 0 \right\}.$$

(a) Determinare una rappresentazione cartesiana dell'insieme A .

(b) Determinare tutti i punti dell'insieme $B = \{z \in A : |z-2| = 2\}$.

(c) Per ciascuno dei numeri complessi $z \in B$ trovati al punto precedente, si calcoli $\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^8$.

Risposte: (a) Sia $z = x + iy$, $z \neq -1$. Poiché

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy},$$

troviamo che

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

Dunque $z \in A$ se e solo se $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Quindi l'insieme A è la circonferenza unitaria, privata del punto $(-1, 0)$. (b) Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x-2)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, segue $x = 1/4$ e $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. L'insieme B contiene solo i due punti

$$z_1 = \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad z_2 = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

(c) Risulta

$$\frac{z_1-1}{z_1+1} = i \frac{\sqrt{15}}{5}, \quad \frac{z_2-1}{z_2+1} = -i \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Quindi

$$\left(\frac{z_1-1}{z_1+1} \right)^8 = \left(\frac{z_2-1}{z_2+1} \right)^8 = \left(\frac{3}{5} \right)^4 = \frac{81}{625}.$$

Esercizio 6. (6 punti) Sia data la funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, con $E = (-9, +\infty) \setminus \{-3\}$, definita da

$$f(x) = \log(x+9) - \frac{x}{x+3}, \quad \text{per ogni } x \in E.$$

- (a) Si determini l'insieme $F \subseteq E$ in cui f è derivabile, la sua derivata prima $f' : F \rightarrow \mathbb{R}$ e gli intervalli in cui f è crescente.
- (b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini quanti elementi distinti contiene l'insieme $S_\alpha = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$.
- (c) Si discuta l'uniforme continuità delle restrizioni $g_1 = f|_{(-3,0)}$ e $g_2 = f|_{(0,+\infty)}$.

Soluzione:

(a) **Insieme di derivabilità, derivata prima e monotonia:**

Poiché f è una combinazione di funzioni elementari (il logaritmo $\log(x+9)$ e la funzione razionale $\frac{x}{x+3}$) che sono derivabili all'interno dei rispettivi domini, f risulta derivabile in ogni punto in cui è definita. Di conseguenza, l'insieme di derivabilità F coincide con il dominio E :

$$F = E = (-9, -3) \cup (-3, +\infty).$$

Calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ per ogni $x \in F$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+9} - \frac{1 \cdot (x+3) - x \cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+9} - \frac{3}{(x+3)^2}$$

Portando tutto allo stesso denominatore otteniamo:

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 - 3(x+9)}{(x+9)(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 9 - 3x - 27}{(x+9)(x+3)^2} = \frac{x^2 + 3x - 18}{(x+9)(x+3)^2}.$$

Per determinare gli intervalli di monotonia studiamo il segno di $f'(x)$. Notiamo che il denominatore $(x+9)(x+3)^2$ è strettamente positivo per ogni $x \in E$. Il segno della derivata dipende quindi unicamente dal numeratore $P(x) = x^2 + 3x - 18$.

Troviamo le radici del numeratore ponendo $x^2 + 3x - 18 = 0$:

$$(x+6)(x-3) = 0 \implies x = -6 \quad \text{e} \quad x = 3.$$

Entrambi i punti appartengono a E . Studiando il segno di $P(x)$ otteniamo che:

- $f'(x) > 0$ per $x \in (-9, -6) \cup (3, +\infty)$;
- $f'(x) < 0$ per $x \in (-6, -3) \cup (-3, 3)$;
- $f'(x) = 0$ per $x = -6$ (punto di massimo locale) e $x = 3$ (punto di minimo locale).

Pertanto, la funzione f è **strettamente crescente** negli intervalli:

$$(-9, -6] \quad \text{e} \quad [3, +\infty).$$

(b) **Numero di elementi di S_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:**

Studiamo l'andamento globale di f calcolando i limiti della funzione agli estremi degli intervalli che compongono il dominio e valutandola nei suoi punti critici:

- $\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x) = -\infty - \frac{-9}{-6} = -\infty$;
- $f(-6) = \log(3) - \frac{-6}{-3} = \log(3) - 2 := y_M < 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \log(6) - \left(\frac{-3}{0^-}\right) = -\infty$;

- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \log(6) - \left(\frac{-3}{0^+}\right) = +\infty$;
- $f(3) = \log(12) - \frac{3}{6} = \log(12) - \frac{1}{2} := y_m > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 1 = +\infty$.

Dall'analisi della monotonia e dei limiti possiamo studiare il numero di intersezioni con la retta orizzontale $y = \alpha$ separatamente sui due intervalli di E :

1. Nell'intervallo $(-9, -3)$, la funzione sale da $-\infty$ a y_M e poi scende a $-\infty$. Per il teorema dei valori intermedi, l'equazione $f(x) = \alpha$ ha 2 soluzioni se $\alpha < y_M$, 1 soluzione se $\alpha = y_M$ e 0 soluzioni se $\alpha > y_M$.
2. Nell'intervallo $(-3, +\infty)$, la funzione scende da $+\infty$ fino a y_m e poi risale a $+\infty$. Di conseguenza, si hanno 0 soluzioni se $\alpha < y_m$, 1 soluzione se $\alpha = y_m$ e 2 soluzioni se $\alpha > y_m$.

Dato che $y_M < 0 < y_m$, unendo i risultati otteniamo che il numero di elementi distinti di S_α è:

- **2 elementi** se $\alpha < y_M$ oppure $\alpha > y_m$;
- **1 elemento** se $\alpha = y_M$ oppure $\alpha = y_m$;
- **0 elementi** se $y_M < \alpha < y_m$.

(c) **Uniforme continuità delle restrizioni:**

- **Restrizione** $g_1 = f|_{(-3,0)}$: L'intervallo $(-3,0)$ è limitato. Tuttavia, come verificato al punto precedente, si ha $\lim_{x \rightarrow -3^+} g_1(x) = +\infty$. Poiché una funzione uniformemente continua su un intervallo limitato deve necessariamente essere limitata (ed estendibile con continuità agli estremi), la restrizione g_1 **non è uniformemente continua**.
- **Restrizione** $g_2 = f|_{(0,+\infty)}$: Consideriamo la derivata prima $f'(x)$ sull'intervallo $(0, +\infty)$. La funzione f' è continua su $[0, +\infty)$ e ammette limite finito per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 18}{(x+9)(x+3)^2} = 0.$$

Essendo f' continua su una semiretta chiusa a sinistra e dotata di limite finito all'infinito, essa è **limitata** su $(0, +\infty)$. Poiché la derivata prima è limitata, la funzione g_2 è Lipschitziana, il che implica direttamente che g_2 è **uniformemente continua** su $(0, +\infty)$.