

Cognome: Nome: Matricola:

Consegnare solo il presente fascicolo (*non* verranno corretti esercizi, parti di esercizi, o risultati riportati su altri fogli).

È consentito lasciare l'aula solo dopo la consegna definitiva dell'elaborato (che **va consegnato anche nel caso ci si ritiri**).

Si richiede di motivare *adeguatamente* la risposta; la sola risposta esatta non verrà valutata. Durata delle prova: **2 ore**.

Parte A

Esercizio 1. (5 punti) Si determini il polinomio di Taylor di terzo grado, centrato nel punto $x_0 = 0$, di due (e non più di due) delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } f(x) = \arctan(3x) - \frac{1}{1+2x}; \quad \text{b) } g(x) = e^{\sqrt{2}x} - \sin(\sqrt{2}x); \quad \text{c) } h(x) = \log(1-4x) + \log(1+4x) .$$

Risposte: a) $-1 + 5x - 4x^2 - x^3$; b) $1 + x^2 + \frac{2\sqrt{2}x^3}{3}$; c) $-16x^2$.

Esercizio 2. (5 punti) Si determini il valore di due (e non più di due) dei seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x \sin x)}{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} + \tan x}{1 + x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}; \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Risposte: a) 3; b) e^2 ; c) $\frac{1}{2}$.

Esercizio 3. (5 punti) Si scelgano due (e non più di due) delle seguenti 3 condizioni e, per ciascuna delle condizioni scelte, si determini in forma algebrica l'unico numero complesso z che la soddisfa:

$$\text{a) } z = \left(e^{-\frac{17}{18}\pi i}\right)^3 \left|-\sqrt{3}-i\right|; \quad \text{b) } z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0; \quad \text{c) } 2\bar{z} = z^3, \operatorname{Re}(z) < 0.$$

$$\text{a) } -\sqrt{3}-i; \text{ b) } -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; \text{ c) } -\sqrt{2}.$$

Parte B

Esercizio 4. (6 punti) Si consideri la funzione $f: (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$.

(a) Applicando il criterio del rapporto, verificare che, per ogni $a \in (0, e)$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$ è convergente e quindi la funzione f è ben definita.

(b) Dato $\varepsilon > 0$, si provi che esiste $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! 2^n}{n^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dedurre che, per ogni $a \in (0, 2)$,

$$\sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Dato $\bar{a} \in (0, 2)$, dimostrare che la funzione f è continua in $\bar{a}$.

Risposte: (a) Posto $u_n = \frac{n! a^n}{n^n}$, si ha che $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! a^n} = \frac{a}{(1 + \frac{1}{n})^n}$. Di conseguenza,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{e}$. Dunque, per il criterio del rapporto, se $a \in (0, e)$ allora la serie converge.

(b) Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dal punto precedente segue che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}$ converge. Di conseguenza, se

indichiamo con $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{n! 2^n}{n^n}$ la successione delle somme parziali, si deduce che la successione s_k è di Cauchy. Quindi esiste $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|s_k - s_h| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $h > k \geq \bar{n}_\varepsilon - 1$. Inoltre, se $h > \bar{n}_\varepsilon - 1$, si ha che $|s_{\bar{n}_\varepsilon - 1} - s_h| = \sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^h \frac{n! 2^n}{n^n}$. Pertanto, $\sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! 2^n}{n^n} = \lim_{h \rightarrow +\infty} |s_{\bar{n}_\varepsilon - 1} - s_h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Infine, se $a \in (0, 2)$, segue che $\sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n} \leq \sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! 2^n}{n^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

(c) Siano $\bar{a} \in (0, 2)$ e $\varepsilon > 0$ fissati. Consideriamo $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con le proprietà ottenute nel punto precedente. Se $a \in (0, 2)$, usando la disuguaglianza triangolare, si deduce che

$$|f(a) - f(\bar{a})| \leq \left| \sum_{n=1}^{\bar{n}_\varepsilon} \frac{n! a^n}{n^n} - \sum_{n=1}^{\bar{n}_\varepsilon} \frac{n! \bar{a}^n}{n^n} \right| + \left| \sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n} \right| + \left| \sum_{n=\bar{n}_\varepsilon}^{+\infty} \frac{n! \bar{a}^n}{n^n} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\bar{n}_\varepsilon} \frac{n! a^n}{n^n} - \sum_{n=1}^{\bar{n}_\varepsilon} \frac{n! \bar{a}^n}{n^n} \right| + \varepsilon. \quad \text{Poiché}$$

$\sum_{n=1}^{\bar{n}_\varepsilon} \frac{n! a^n}{n^n}$ è un polinomio e quindi una funzione continua, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $a \in I(\bar{a}, \delta) \cap (0, 2)$ si ha che $|f(a) - f(\bar{a})| \leq 2\varepsilon$. Pertanto è soddisfatta la definizione di limite: $\lim_{a \rightarrow \bar{a}} |f(a) - f(\bar{a})| = 0$. Quindi f è continua in $\bar{a}$.

Esercizio 5. (6 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Si determini l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ in cui f è continua.
- (b) Si calcolino, se esistono, la derivata destra e la derivata sinistra di f in $x = 0$, specificando se la funzione risulta derivabile in tale punto.
- (c) Si stabilisca se la restrizione di f all'intervallo $[-1, 1]$ è uniformemente continua e se è Lipschitziana.

Risposte:

- (a) Per $x \neq 0$, la funzione è composta da funzioni elementari continue (rapporti, logaritmi, radici e funzioni trigonometriche) nei rispettivi domini di definizione. Pertanto, f è sicuramente continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dobbiamo verificare la continuità nell'origine studiando il comportamento al limite per $x \rightarrow 0$:

- **Limite da sinistra ($x \rightarrow 0^-$):** Sfruttando il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, ponendo $t = x^2$ otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0.$$

- **Limite da destra ($x \rightarrow 0^+$):** Poiché la funzione coseno è limitata ($|\cos(1/x)| \leq 1$) e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3} = 0$, per il teorema del confronto (il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata è infinitesimo) si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, la funzione è continua anche in $x = 0$. L'insieme di continuità è dunque $E = \mathbb{R}$.

- (b) Essendo la funzione definita a tratti attorno all'origine, calcoliamo le derivate destra e sinistra mediante il limite del rapporto incrementale in $x = 0$, ricordando che $f(0) = 0$.

- **Derivata sinistra $f'_-(0)$:**

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1.$$

La derivata sinistra esiste ed è pari a 1.

- **Derivata destra $f'_+(0)$:**

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^3} \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

poiché $\sqrt{x} \rightarrow 0$ e il coseno rimane limitato. La derivata destra esiste ed è pari a 0.

Conclusione sulla derivabilità: Poiché le derivate destra e sinistra in $x = 0$ esistono finite ma sono diverse tra loro ($f'_-(0) = 1 \neq 0 = f'_+(0)$), la funzione **non è derivabile** in $x = 0$ (il punto $x = 0$ è un punto angoloso).

- (c) • **Uniforme continuità:** Al punto (a) abbiamo dimostrato che f è continua su tutto $\mathbb{R}$, e di conseguenza lo è anche sulla sua restrizione all'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$. Per il **Teorema di Heine-Cantor**, ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua. Pertanto, la restrizione di f a $[-1, 1]$ è **uniformemente continua**.

- **Lipschitzianità:** Una funzione continua su un intervallo è Lipschitziana solo se ha la derivata prima limitata nei punti in cui essa esiste. Controlliamo il comportamento della derivata per $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^3} \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Se calcoliamo la derivata nei punti $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$f'(x_n) = \frac{3}{2}\sqrt{x_n} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \rightarrow +\infty, \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Di conseguenza, la derivata prima **non è limitata** in ogni intorno destro dell'origine. Non essendoci limitatezza della derivata, la funzione **non è Lipschitziana** su $[-1, 1]$.

Esercizio 6. (6 punti) È definita la successione $a_n = \int_0^{1/n} (1-x^2)^n dx$, $n \geq 1$.

(a) Si dimostri che $0 \leq a_n \leq 1/n$ per $n \geq 1$.

(b) Si dimostri che $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 1$ (Suggerimento: si osservi che $(0, \frac{1}{n}) = (0, \frac{1}{n+1}] \cup (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$).

(c) Si dimostri che $a_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2}$ per $n \geq 1$, e se ne deduca che $na_n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$. (Suggerimento: si utilizzi la disuguaglianza di Bernoulli)

Risposte:

(a) Da $0 \leq (1-x^2)^n \leq 1$ segue che $0 \leq a_n \leq \int_0^{1/n} 1 dx = \frac{1}{n}$.

(b) $a_n = \int_0^{\frac{1}{n+1}} (1-x^2)^n dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (1-x^2)^n dx$. Ovviamente $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (1-x^2)^n dx > 0$. Poiché $0 < 1-x^2 < 1$ per $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, si ha $(1-x^2)^{n+1} < (1-x^2)^n$. Pertanto $a_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{n+1}} (1-x^2)^{n+1} dx < \int_0^{\frac{1}{n+1}} (1-x^2)^n dx$.

Concludiamo che $a_{n+1} < \int_0^{\frac{1}{n+1}} (1-x^2)^n dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (1-x^2)^n dx = a_n$. (c) Dalla diguaguaglianza di Bernoulli segue che $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$, e integrando $a_n \geq \int_0^{1/n} (1-nx^2) dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^2}$. Poiché

$$1 - \frac{1}{3n} \leq na_n \leq 1$$

segue per confronto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 1$.