SISTEMI LINEARI

(1) Sono dati i seguenti sistemi lineari:

$$(a)\ \begin{cases} x-y=0 \\ x-y-z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ 2x+z=-1 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-2y-2z=0 \\ 2x-z=1 \\ y+2z+t=0 \end{cases}$$

Per ciascuno di essi si determini la forma matriciale e applicando il metodo di riduzione di Gauss si stabilisca se il sistema è risolubile. In caso affermativo si determini l'insieme delle soluzioni.

(2) Considerare il seguente sistema lineare in funzione del parametro reale h:

$$\begin{cases} x+2y+3z-t=h \\ x-2y-z+3t=0 \\ x+t=0 \\ y+z+(h-1)t=0 \end{cases}$$

Determinare la forma matriciale del sistema e applicando il metodo di riduzione di Gauss stabilire per quali valori di h il sistema ammette soluzioni. Per i valori trovati si determini l'insieme delle soluzioni.

(3) Considerare il seguente sistema lineare in funzione del parametro reale a:

$$\begin{cases} ax-ay+t=0 \\ x-2y-z=0 \\ y+az+t=0 \end{cases}$$

Determinare la forma matriciale del sistema e applicando il metodo di riduzione di Gauss stabilire per quali valori di a il sistema ammette soluzioni. Per i valori trovati si determini l'insieme delle soluzioni.

(4) Considerare il seguente sistema lineare in funzione del parametro reale h:

$$\begin{cases} hx+y+(3h+1)z-t=0 \\ -2x+(h+2)y+(h-4)z-2t=4 \\ x+hy+(3+h)z-t=0 \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di h il sistema ammette soluzioni;
(b) stabilire per quali valori di h l'insieme delle soluzioni è infinito,
(c) posto $h=1$, determinare tutte le soluzioni del sistema.

(5) Considerare il seguente sistema lineare in funzione del parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x - 2y + (k-1)z = 1 - k \\ x + (k-1)y + kz = 1 \\ -x + y = 2 - k \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni;
(b) stabilire per quali valori di k il sistema ammette un'unica soluzione;
(c) posto $k = 2$, determinare tutte le soluzioni del sistema.

(6) Sia data l'equazione $y = ax^2 + bx + c$ di una parabola con asse parallelo all'asse y. Discutere, al variare del parametro reale k, l'esistenza di una tale parabola passante per i punti $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (4, 6)$ e $P_2 = (k, 1 + k^2)$.