MATRICI

1. Sia A una matrice quadrata 3×3 di colonne A^1, A^2 e A^3, considerare i vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificare che risulta:
$$A\mathbf{e}_1 = A^1 \quad A\mathbf{e}_2 = A^2 \quad A\mathbf{e}_3 = A^3.$$

2. Per ogni intero $n \geq 3$ definiamo n vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ in $\mathbb{R}^n$ nel seguente modo: $\mathbf{e}_i$ è il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha tutte le entrate nulle tranne l'entrata $i-$esima che vale 1. Verificare che per ogni matrice A quadrata $n \times n$ di colonne A^1,$\dots A^n$ si ha: $A\mathbf{e}_i = A^i$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:
   (a) trovare tutti i vettori $X \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione matriciale
   $$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
   (b) trovare tuti i vettori $X \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l' equazione matriciale
   $$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$
   (c) estabilire se siste un vettore $X \in \mathbb{R}l^2$ che soddisfa l' equazione
   $$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Dato il vettore $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:
   (a) trovare tutte le matrici A, 2×2 ad elementi in $\mathbb{R}$, che soddisfano l'equazione
   $$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
   (b) sia A una matrice $k \times 2$ ad entrate reali che soddisfa l'equazione
   $$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

verificare che la prima colonna di A coincide con la seconda colonna di A.

5. Sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare:

   $$(A+2B)(A-2B),\ A^2-4B^2,\ A(4I_2),\ B(I_2A),\ CD,\ DC.$$

6. Sono date le matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$. Stabilire quali prodotti possono essere eseguiti con le matrici A, B, C, e D.

7. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, si indichi con $0_{\mathbb{R}^2}$ il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.

   (a) verificare che la matrice AA è la matrice nulla 2×2;

   (b) verificare che l'insieme $\{X \in \mathbb{R}^2 | AX = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ non contiene solo il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$;

   (c) trovare una matrice B quadrata 2×2, non nulla, tale che AB sia la matrice nulla;

   (d) stabilire se la matrice A è invertibile.

8. Calcolare le matrici inverse delle seguenti matrici:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici reali quadrate:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Determinare per quali valori del parametro reale k la seguente matrice è invertibile:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k^2 & k^4 \end{pmatrix}$$
e per i valori trovati si determini la matrice inversa.

11. Determinare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{K}$ la seguente matrice è invertibile:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e per i valori trovati si determini la matrice inversa.

12. Determinare l'inversa della matrice $n \times n$ triangolare superiore $U = (u_{ij})$ dove $u_{ij} = 1$ se $i \leq j$ e $u_{ij} = 0$ se $i > j$, ossia
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Mostrare che l'insieme
$$\mathcal{N} = \left\{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AA = 0_{Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})} \right\}$$
non contiene solo la matrice nulla, anzi contiene infiniti elementi. Provare che per ogni $A \in \mathcal{N}$ la matrice $I_2 - A$ è invertibile.