SPAZI VETTORIALI

1. Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi $p(x)$ a coefficienti reali nell'indeterminata x. Indichiamo con $\deg p(x)$ il grado del polinomio $p(x)$.
   (a) Verificare che $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$;
   (b) stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}[x]$:

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) \text{ è divisibile per } (x+1)\},$$

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}, \quad W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\} \mid \deg p(x) \leq 3\} \cup \{0\},$$

$$T = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\} \mid \deg p(x) = 3\}, \quad X = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = p(-x)\}.$$

2. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ sono sottospazi di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{22} = 0, a_{12} + a_{21} = 0\},$$

$$V = \left\{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$W = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AA = 0_2\},$$

$$Z = \left\{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

   La notazione 0_2 indica la matrice nulla 2×2.

3. Sia $D_n \subset Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ il sottoinsieme delle matrici $n \times n$ diagonali; verificare che D_n è un sottospazio di $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

4. Verificare che i vettori $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ nella base $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ e nella base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$.

5. Dati i vettori si $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che i vettori sono linearmente indipendenti e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che li contiene.

6. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sia U il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 | AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verificare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e determinare una base di U.

7. Sia $h \in \mathbb{R}$, considerare i vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+h \\ 1+h \\ h \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare, al variare di h, la dimensione del sottospazio U_h generato dai vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$;

   (b) stabilire per quali valori di h il vettore $\underline{v}_4$ appartiene al sottospazio U_h.

8. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali. Provare che i polinomi $f(x) = 1+x$, $g(x) = x+x^2$, $h(x) = 1+x^2$ sono linearmente indipendenti.

9. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in x a coefficienti reali. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$:

$$\mathbb{R}[x]_4 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \cdots 4\},$$

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_4 \ | p(1) = 0\}.$$

   (a) Verificare che $\mathbb{R}[x]_4$ è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$;

   (b) determinare una base di $\mathbb{R}[x]_4$ e la dimensione di $\mathbb{R}[x]_4$.

(c) scrivere le coordinate del polinomio $a(x) = x^4 - 2x^3 + x$ rispetto alla base trovata nel punto (b);

(d) verificare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_4$, determinare una base.

10. Si consideri il seguente sottoinsieme di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Verificare che S è un sottospazio di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

(b) determinare la dimensione e una base di S.

11. Si consideri il seguente sottoinsieme di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T = \{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0 \},$$

dove per $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si ha $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Verificare che T è un sottospazio di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

(b) determinare la dimensione e una base di T.

12. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix},$$

(a) determinare la dimensione del sottospazio W generato dai vettori $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$, e $\underline{w}_3$ al variare del parametro reale k;

(b) stabilire per quali valori di k i vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

13. Si consideri l'insieme $\mathbb{C}^2$ delle coppie ordinate di numeri complessi:

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} | z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

(a) Trovare una base e la dimensione di $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \end{pmatrix};$$

$$\alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C};$$

(b) verificare che $\mathbb{C}^2$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + w_1 \\ z_2 + w_2 \end{pmatrix};$$

$$a \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 \\ a z_2 \end{pmatrix}, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

trovare una base e la dimensione in questo caso.

14. Considerare i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x - y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

e V generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di U e V;

(b) determinare la dimensione e una base di $U \cap V$ e $U + V$.

15. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T = \{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0 \},$$

dove per $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si ha $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Verificare che S e T sono sottospazi di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

(b) determinare la dimensione e una base di S e T;

(c) determinare il sottospazio $S \cap T$ e la dimensione di $S + T$.

16. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ x + 2y - z = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ x - z = 0 \right\}.$$

(a) Determinare una base per i sottospazi U e W;

(b) calcolare la dimensione del sottospazio $U + W$;

(c) stabilire se la somma è diretta;

(d) trovare un sottospazio complementare di U.