Lezione 1 - 26/10/2026

Insiemi Numerici

Indichiamo con $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$$

con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi (o relativi)

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali, ossia delle frazioni aventi al numeratore un numero intero qualsiasi e al denominatore un numero naturale/intero diverso da $\emptyset$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

Due frazioni si dicono equivalenti $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ se rappresentano lo stesso numero razionale, cioè se $mq = np$ → ogni numero razionale può essere rappr. da infinite frazioni tra loro equivalenti

$$\frac{5}{6} \equiv \frac{10}{12} \iff 5 \cdot 12 = 10 \cdot 6$$

Osservazioni

- $a - b = a + (-b)$ $\quad a, b \in \mathbb{Q}$
- $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ $\quad$? $\quad b \neq 0$

R

L'insieme $\mathbb{I}$ è l'insieme dei numeri irrazionali, ossia dei numeri che non possono essere espressi mediante una frazione.

I suoi elementi sono tutti i numeri decimali illimitati non periodici, cioè quei numeri per cui non esiste una frazione generatrice.

ES. $\pi = 3,141592\ldots$ → ∞ di cifre decimali che non si ripetono

$\sqrt{2} = 1,41\ldots$

$\sqrt{3} =$

$-\sqrt[3]{5} =$

↓

- è il rapporto costante tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro c/d

- è un numero irrazionale e trascendente, non può essere espresso come una frazione esatta né come soluzione di un eq. algebrica a coeff. razionali

Costante di Nepero: e - Eulero

$e = 2.7182\ldots$ → numero irrazionale e trascendente

è la base dei logaritmi naturali "ln"

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.

Questo insieme è definito come l'unione tra l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e l'insieme $\mathbb{I}$ dei numeri irraz.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

sono tutti i numeri che possono essere espressi mediante una rappresentazione decimale, limitata o illimitata periodica o non periodica.

Priorità delle operazioni

L'ordine di priorità delle operazioni in matematica e logica si segue secondo una scala gerarchica

1) PARENTESI ( ), [ ], { } partendo dalle più interne → est

2) POTENZE e RADICI si risolvono gli elementi a potenza

3) MOLTIPLICAZIONI e DIVISIONI hanno la stessa priorità si risolgono nell'ordine in cui compaiono da sx → dx

4) ADDIZIONI e SOTTRAZIONI "

ES.

$$[15 + (3^2 \times 2)] - 20 : 4$$

$$[15 + (9 \times 2)] - 20 : 4$$

$$[15 + 18] - 20 : 4$$

$$33 - 20 : 4$$

$$33 - 5$$

$$28$$

ES.

$$(5 + 2^3 \times 3) : 2 - 4$$

Nota: POTENZE → moltiplicazioni ripetute a^n

a: base n: esponente

RADICALI → SE l'esponente è una frazione, cioè un numero razionale del tipo m/n, allora per definizione la potenza è un radicale che ha come radicando la base elevata al numeratore dell'esponente e come indice di radice il denominatore dell'esp.

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad m, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$$

Es. $3^{1/2} = \sqrt{3}$

$5^{3/2} = \sqrt{5^3}$

$2^{5/7} = \sqrt[7]{2^5}$

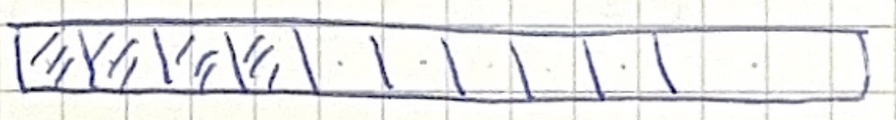
FRAZIONI

Una frazione a/b, $b \neq 0$ indica "a" parti di un intero diviso in "b" parti uguali

Il denominatore dice quanto grandi sono le parti

il numeratore dice quante ne prendiamo

$\frac{4}{10}$



Le 4° operazioni:

1) SEMPLIFICARE: si dividono numeratore e denominatore per la stessa quantità $\neq 0$

perché funziona?

$n/n = 1$ → il valore non cambia, cambio solo la scrittura

Es. $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\frac{18}{36} \overset{2}{=} \frac{9}{18} \overset{3}{=} \frac{3}{6} \overset{3}{=} \frac{1}{2}$

Se si divide per il MASSIMO COMUNE DIVISORE (MCD) di numeratore e denominatore ⇒ si arriva in 1° passaggio alla frazione ridotta ai minimi termini cioè non più semplificabile.

Es. $\frac{18}{30} \Rightarrow MCD\,6 \Rightarrow \frac{3}{5}$ [le regole sono come c'è]

MASSIMO COMUNE DIVISORE

Def. dato un insieme di numeri interi n definisce "Massimo Comune Divisore": il maggiore dei divisori comuni di tutti i numeri

Metodo: Scomposizione in fattori primi

Fattori primi di un numero sono i numeri primi che, moltiplicati tra loro, formano quel numero iniziale

→ numeri primi → un numero intero > 1 si dice "primo" se può essere diviso solo per 1 e per se stesso
ES. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

→ Fattori → sono i numeri che vengono moltiplicati tra loro in una moltiplicazione

ES. 12 ↑ 2·6
3·4
2·2·3 = $2^2 \cdot 3$ → 2,3 sono i fattori primi

ES. $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$18 = 2 \cdot 3^2$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$

MCD 1) Scompongo fattori primi
2) Prendo i fattori in comune 2, 3
3) Scelgo l'esp. più piccolo
2^1, 3^2
4) Moltiplico tra loro $2 \cdot 3^2 = 18$

ES. 18/30

1) Scomporre in fattori primi

$18 = 2 \cdot 3^2$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ← NO!

2) Scelta dei fattori comuni con l'esp. più piccolo

2, 3, ~~4~~

3) Moltiplicare $2 \cdot 3 = 6$ MCD

Come si fa a trovare i numeri primi che compongono un numero?

↳ Metodo delle divisioni successive

↳ dividere il numero ripetutamente per i numeri primi più piccoli

(2, 3, 5, 7, 11)

2) SOMMA e SOTTRAZIONE

Regola: si porta tutto allo stesso denominatore di solito il mcm dei denominatori, poi si sommano o si sottraggono i numeratori e si lascia il denominatore comune

ES $1/4 + 5/6 = ?$

mcm = 12

$1/4 = 3/12$

$5/6 = 10/12$

$3/12 + 10/12 = 13/12$

ES. $5/6 - 1/4 = 10/12 - 3/12 = 7/12$

ES. 18/30

1) Scomporre in fattori primi

$18 = 2 \cdot 3^2$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ← NO!

2) Scelta dei fattori comuni con l'esp. più piccolo

2, 3, ~~5~~

3) Moltiplicare $2 \cdot 3 = 6$ MCD

Come si fa a trovare i numeri primi che compongono un numero?

↳ Metodo delle divisioni successive

↳ dividere il numero ripetutamente per i numeri primi più piccoli

(2, 3, 5, 7, 11)

2) SOMMA e SOTTRAZIONE

Regola: si porta tutto allo stesso denominatore di solito il MCM dei denominatori, poi si sommano o si sottraggono i numeratori e si lascia il denominatore comune

ES. $1/4 + 5/6 = ?$

mcm = 12

$1/4 = 3/12$

$5/6 = 10/12$

$3/12 + 10/12 = 13/12$

ES. $5/6 - 1/4 = 10/12 \; 3/12 = 7/12$

MINIMO COMUNE MULTIPLO (dei denominatori)
tra 2 o più interi è il più piccolo numero positivo che è un multiplo di ciascuno di essi.

→ Metodo: 1) Scomporre in fattori primi
2) Prendi tutti i fattori (sia comuni che non) una sola volta
3) Assegna a ciascun fattore l'esp. più alto con cui compare nelle scomposizioni
4) Moltiplica tra loro gli fattori x ottenere il risultato

Es. mcm (30, 18)

→ 30 : $2 \times 3 \times 5$

→ 18 : 2×3^2

→ $2, 3^2, 5 = 90$

$$\frac{7}{30} + \frac{5}{18} = \frac{}{}$$

$$= \frac{21}{90} + \frac{25}{90} = \frac{46}{90}$$

3) PRODOTTO: numeratore × num.; denom × denom

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

$$3 \cdot \frac{10}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\frac{4}{93} \times \frac{3}{82} = \frac{1}{6}$$

Segni uguali danno risultato positivo
diversi negativo

4) DIVISIONE: si moltiplica la prima frazione per il reciproco della seconda, cioè la seconda con numeratore e denom. scambiati

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad c \neq 0$$

ES. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{4_1} \times \frac{8^2}{5} = \frac{6}{5}$

FRAZIONE GENERATRICE

Per passare da un numero decimale ad una frazione che lo ammette come rappresentazione decimale (FRAZIONE GENERATRICE)

→ se il numeratore decimale è finito si scrive al numeratore il numero senza la virgola e al denominatore 1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre decimali

$3,5 = \frac{35}{10}$ $\quad 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$17,03 = \frac{1703}{100}$

Da decimale periodico a frazione: al numeratore il numero scritto senza virgola meno la parte che precede il ~~periodo~~ periodo; al denominatore tanti 9 quante le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante le cifre dell'anteperiodo

ORDINAMENTO

Riordinare i numeri: $10, -5, 0, 1, 7$

$-5, 0, 1, 7, 10 \longrightarrow$ retta

Riordinare i numeri: $0,3, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{7}{30}$

mcm

$0,3 = \frac{3}{10}$ $\quad mcm(10,3,12,30)$

$10 = 2 \cdot 5$
$3 = 3 \cdot 1$
$12 = 2^2 \cdot 3$
$30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$

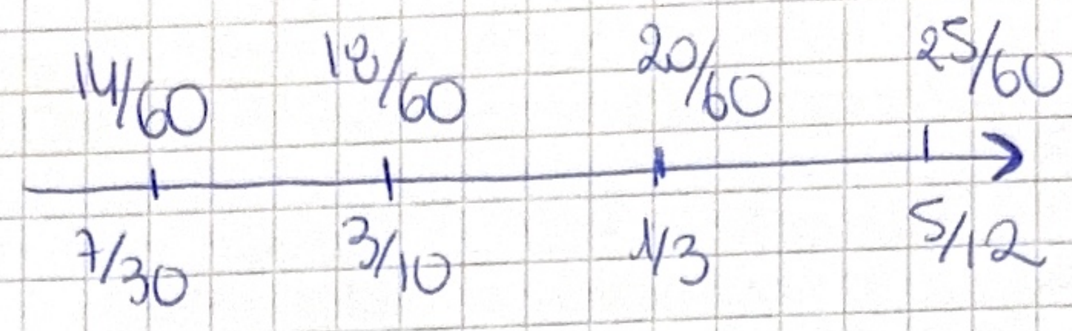
$2^2 \times 5 \times 3 = 60$

$\frac{3}{10} = \frac{18}{60}$

$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$

$\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$

$\frac{7}{30} = \frac{14}{60}$



Quindi: se 2 frazioni hanno lo stesso denominatore sarà > quello con numeratore + grande

ES. $\frac{5}{14}$, $\frac{9}{14}$

$\frac{9}{14} > \frac{5}{14}$

ES. $-\frac{5}{14}$, $-\frac{9}{14}$

Tra due numeri negativi è più grande quello con valore assoluto minore

Moltiplicare o dividere i 2 membri per un numero negativo inverte il verso della disuguaglianza ←

$-\frac{5}{14} > -\frac{9}{14}$ $\qquad$ $\frac{5}{14} < \frac{9}{14}$

Se 2 frazioni hanno denominatori ≠ devo ridurre allo stesso mcm

PERCENTUALI e PROPORZIONI

→ Che cosè una percentuale?

Il simbolo "p%" significa "p centesimi", cioè la frazione p/100.

ES. 15% = 15/100 = 0.15

Una percentuale è quindi una frazione con denominatore 100 e tutte le regole sulle frazioni continuano a valere.

→ Il p% di N

Regola: p% di N = N · p/100

ES. 15% di 80 = 80 · 15/100 = 12

→ Aumento del p%?

Regola: si moltiplica per N(1 + p/100) = R

ES. 80 aumentato del 15% → 80 · (1+0,15) = 92

→ Sconto del p%? N(1 - p/100) = R

ES. 80 scontato del 15% → 80 · (1-0,15) = 68

PROBLEMA INVERSO

Se dopo lo sconto del 15% il netto è 68€, quale era quello iniziale?

Si imposta N = $\frac{R}{(1 - p/100)} = \frac{68}{1 - \frac{15}{100}} = \frac{68}{0,85} = 80$

→ Variazioni %. successive

Regola: non si sommano le percentuali, si moltiplicano i fattori

↓

La seconda variazione si applica al valore già modificato non a quello di partenza → La base di calcolo cambia

ES.

Prezzo 100€, aumento del 20% e poi sconto 20%

→ aumento $N\left(1+\frac{P}{100}\right)=$

$$100\left(1+\frac{20}{100}\right)=100\left(\frac{120}{100}\right)=120$$

→ sconto $N\left(1-\frac{P}{100}\right)=$

$$120\left(1-\frac{20}{100}\right)=120\left(\frac{100-20}{100}\right)=120\cdot\frac{80}{100}=96$$

→ Il risultato finale è una variazione del 4%

→ Variazione % tra 2 valori

$$\frac{(\text{valore finale}-\text{valore iniziale})}{\text{valore iniziale}}$$

Da 80 a 92 $\quad\frac{92-80}{80}=15\%$