APPLICAZIONI LINEARI

1. Stabilire se le seguenti applicazioni sono applicazioni lineari:

   (a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ y \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \end{pmatrix};$

   (b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy;$

   (c) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ 2z-y \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+2 \end{pmatrix}.$

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-y \\ x-2y \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare le immagini dei vettori della base canonica $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$;

   (b) trovare una matrice A, 3×2, per cui risulti $L(X) = AX$, per ogni $X \in \mathbb{R}^2$;

   (c) determinare dimensione, una base ed equazioni cartesiane per i sottospazi $KerL$ e ImL.

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' applicazione lineare data da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare dimensione, una base ed equazioni cartesiane per i sottospazi $KerL$ e ImL;

   (b) determinare l'insieme $L^{-1}(\mathbf{u})$, dove $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Sia $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in x di grado $\leq n$. Sia $D\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ l' applicazione che ad ogni polinomio $p(x)$ associa la sua derivata prima $D(p(x))$.

   (a) Verificare che D è un'applicazione lineare;

   (b) determinare dimensione ed una base per i sottospazi $kerD$ e ImD;

   (c) stabilire se D è iniettiva o suriettiva;

   (d) posto $n = 3$, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$.

5. Sia $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Si consideri l' applicazione $L\colon Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ data da:

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che L è un' applicazione lineare;

(b) determinare dimensione ed una base per i sottospazi $kerL$ e ImL;

(c) dopo avere fissato una base $\mathcal{B}$ per $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$.

6. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Costruire un'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con le seguenti proprietà:

   - $kerL$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,

   -ImL è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$.

   Stabilire se tale applicazione è unica.

7. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, si considerino le seguenti applicazioni lineari:

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(X) = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \; T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2.$$

   (a) Scrivere le matrici associate a L e T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$;

   (b) determinare le applicazioni lineari $L \circ T$ e $T \circ L$;

   (c) determinare la dimensione e una base dei sottospazi $Ker(L \circ T)$ e $Ker(T \circ L)$.

8. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2,$$

   dove $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Stabilire per quali valori del parametro k i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ sono una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$;

   (b) per i valori trovati in (a), scrivere le matrici del cambio di base $N = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)$ e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$;

   (c) posto $k = 0$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(\mathbf{w}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Verificare che L è un isomorfismo e scrivere la matrice associata a L nella base canonica: $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$.

9. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica $\mathbb{R}^3$. Si considerino i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verificare che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sono una una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$;

   (b) scrivere la matrice del cambio di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id)$;

   (c) calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.