Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 10 luglio 2025

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

e si consideri il sottospazio $W = \text{Span}\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4\}$.

(1) Determinare la dimensione e una base $\mathcal{B}$ di W.
(2) Verificare che esiste un'unica applicazione lineare $L\colon W \to \mathbb{R}^3$ tale che $L(w_1) = e_1$, $L(w_2) = e_2$, $L(w_3) = e_3$, dove $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$; determinare $L(w_4)$.
(3) Stabilire se L è un isomorfismo; determinare la matrice associata a L rispetto alla base $\mathcal{B}$ di W scelta nel punto (1) e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(4) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - x_4 = 0$, si consideri il sottospazio $U = W \cap V$. Determinare una base per il sottospazio $L(U)$.

Solluzione

(1) Utilizziamo il metodo di Gauss per estrarre una base da $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

dove abbiamo svolto le operazioni $II \to II - I$, poi $IV \to IV - III$, poi scambiato terza e seconda e poi $IV \to IV + III$.
Troviamo 3 pivot sulle prime 3 colonne e quindi $\dim W = 3$ e una base è $\mathcal{B} = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$.

(2) Per il teorema di struttura delle applicazioni lineari, poiché $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ è una base di W, L è univocamente determinata dai suoi valori su questi tre vettori. Inoltre, si vede subito che $w_4 = w_1 + w_2 - w_3$ e dunque $L(w_4) = L(w_1) + L(w_2) - L(w_3) = e_1 + e_2 - e_3$.

(3) Poiché L manda una base di W in una base di $\mathbb{R}^3$, è un isomorfismo; inoltre, detta $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, abbiamo

$$C_{\mathcal{E}}(L(w_j)) = C_{\mathcal{E}}(e_j) = e_j \qquad j = 1, 2, 3$$

e dunque

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(4) Per trovare una base di $W \cap V$, cerchiamo quali elementi di W soddisfano l'equazione di V; per far questo, scriviamo $w \in W$ come $aw_1 + bw_2 + cw_3$, dunque

$$w = \begin{pmatrix}a+c\\a\\b\\b+c\end{pmatrix}$$

e dunque $w \in V$ se e solo se $a + c = b + c$ ovvero se e solo se $a = b$. Dunque

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}a+c\\a\\a\\a+c\end{pmatrix} \ :\ a, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\{w_1 + w_2, w_3\}.$$

Ora, L è un isomorfismo, quidni manda basi in basi, per cui una base di $L(U)$ sarà l'immagine di una base di U, ovvero

$$\{L(w_1 + w_2), L(w_3)\} = \{e_1 + e_2, e_3\}.$$

Esercizio 2 Si consideri, al variare del parametro reale h, la matrice seguente:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ h-1 & h & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare il polinomio caratteristico di A_h al variare del parametro reale h.
(2) Stabilire per quali valori del parametro reale h la matrice A_h è diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori del parametro reale h la funzione

$$g_h \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g_h(X,Y) = {}^tXA_hY,$$

è una forma bilineare simmetrica (o prodotto interno), stabilire se per tali valori è un prodotto scalare.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare la segnatura di g_h ed una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a g_h ha la forma canonica di Sylvester.

Soluzione

(1) Calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & h \\ 0 & h & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & h \\ h & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - h^2) = (2-h)(1-h-\lambda)(1+h-\lambda)$$

sviluppando sulla prima riga con Laplace.
(2) Vediamo che il polinomio caratteristico si annulla per $\lambda = 2, 1+h, 1-h$; queste tre radici sono distinte se

$$2 \neq 1+h \Leftrightarrow 1 \neq h$$
$$2 \neq 1-h \Leftrightarrow -1 \neq h$$
$$1+h \neq 1-h \Leftrightarrow 0 \neq h$$

dunque, se $h \neq 0, \pm 1$, sicuramente la matrice è diagonalizzabile, avendo tre autovalori distinti di molteplicità algebrica 1.

Se $h = 0$, la matrice ha autovalori 2 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2; si ha

$$\text{m.g.}(1) = \dim \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{m.a.}(1)$$

(tutte le righe sono tra loro dipendenti e dunque il rango è 1) e quindi per $h = 0$ la matrice è diagonalizzabile.

Se $h = 1$, la matrice è simmetrica e dunque diagonalizzabile per il teorema spettrale, con autovalori 2 con m.a. 2 e 0 con m.a. 1.

Se $h = -1$, la matrice ha autovalori 2 con m.a. 2 e 0 con m.a. 1 e si ha

$$\text{m.g.}(2) = \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq \text{m.a.}(2)$$

(le due righe non nulle sono indipendenti, avendo zeri in posizione diversa) e dunque per $h = -1$ la matrice non è diagonalizzabile.

Dunque A_h è diagonalizzabile se e solo se $h \neq -1$.
(3) La funzione g_h è simmetrica se e solo se $A_h = A_h^t$ e dunque se e solo se $h - 1 = 0$ ovvero se e solo se $h = 1$; inoltre, g_h è ovviamente una forma bilineare per ogni valore di h, per le proprietà del prodotto righe per colonne. Sapendo che, per $h = 1$, gli autovalori di A_1 sono 2 (con molteplicità 2) e 0 (con molteplicità 1), abbiamo che g_h non è definita positiva (avendo la matrice associata un autovalore nullo) e dunque non è un prodotto scalare.
(4) Per quanto detto al punto precedente, g_h ha segnatura $(2,0,1)$. Per trovare una base che porti g_h in forma canonica di Sylvester, possiamo costruire una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$) di autovettori di A_h e normalizzarli rispetto alla forma bilineare g_h. Sia

$$E_2 = \ker(A_1 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e vediamo che i due vettori trovati sono già ortogonali rispetto al prodotto scalare standard. Inoltre

$$E_0 = \ker A_1 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sappiamo che E_0 e E_2 sono ortogonali, quindi sicuramente il vettore trovato come base di E_0 è ortogonale ai precedenti.

La base voluta sarà dunque

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Esercizio 3 Fissato, nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R}$, considerare i sottoinsiemi $\sigma_k,\ \tau_k \subset \mathbb{E}^3$ definiti dalle equazioni cartesiane

$$\sigma_k \ : \ \begin{cases} x + ky + (k+1)z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 + k \end{cases} \qquad \tau_k \ : \ \begin{cases} kx + y + z &= 2 \\ y + (1-k)z &= 2 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Verificare che σ_k e τ_k sono sottospazi affini per ogni $k \in \mathbb{R}$ e determinare le loro dimensioni in funzione di k.
(2) Verificare che, per $k = 0$, σ_0 e τ_0 sono piani affini incidenti, dimostrare che esiste un unico piano η perpendicolare a entrambi e passante per l'origine e trovarne una forma parametrica.
(3) Verificare che, per $k = 1$, σ_1 e τ_1 sono rette affini incidenti, dimostrare che esiste un unico piano affine π che le contiene entrambe e trovarne un'equazione cartesiana.
(4) Verificare che, per $k = -1$, σ_{-1} e τ_{-1} sono rette affini sghembe e calcolarne la distanza.
(5) Determinare la posizione reciproca di σ_k e τ_k in funzione di k.

Soluzione

(1) Consideriamo σ_k e riduciamo a scala la corrispondente matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1+k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

dunque, la matrice completa ha rango 2 (senza pivot nella colonna dei termini noti, quindi ci sono soluzioni) se $k \neq 0$ e in tal caso σ_k è una retta affine, quindi di dimensione $1 = 3 - 2$. Se invece $k = 0$, otteniamo che la matrice completa ha rango 1 (sempre senza pivot nei termini noti) e dunque σ_k è un piano affine, dunque dimensione 2.

Allo stesso modo, per τ_k, si ha

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-k & 2 \end{pmatrix}$$

che è già ridotta a scala con 2 pivot (nessuno nei termini noti) se $k \neq 0$ e dunque in tal caso τ_k è una retta affine, cioè dimensione 1; se invece $k = 0$, le due righe sono una multipla dell'altra e dunque τ_k è un piano affine, cioè dimensione 2.

(2) Per $k = 0$, come detto, σ_0 e τ_0 sono piani affini di equazioni

$$x + z = 1, \qquad y + z = 2$$

e si vede che le giaciture $x + z = 0$ e $y + z = 0$ non coincidono (le equazioni non sono una multipla dell'altra), dunque i due piani non possono essere né paralleli, né coincidenti; pertanto σ_0 e τ_0 sono incidenti in una retta.

Vediamo che la giacitura di σ_0 è l'ortogonale di $(1, 0, 1)^t$ e la giacitura di τ_0 è l'ortogonale di $(0, 1, 1)^t$. Dunque il piano η richiesto è

$$\eta : t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R} .$$

(3) Per $k = 1$, abbiamo già visto che σ_1 e τ_1 sono rette affini. Per vedere che sono incidenti, cerchiamone l'intersezione, risolvendo

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \\ y &= 2 \end{cases}$$

dove si vede subito che $y = 2$, $x + z = 0$, $x + 2z = -1$ e dunque $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$. Quindi le rette sono incidenti nel punto $P \equiv_{\mathcal{R}} (1, 2, -1)$.

Le giaciture di σ_1 e τ_1 sono generate da due vettori linearmente indipendenti: $(1, -1, 0)^t$ e $(1, 0, -1)^t$ che insieme generano un sottospazio di dimesione 2; π sarà allora il piano affine con tale giacitura e passante per P ed è quindi unico: infatti, è parallelo a entrambe le rette e interseca entrambe le rette, dunque le contiene.

Ora, vediamo che l'equazione $x+y+z = 0$ è soddisfatta da entrambi i generatori trovati prima; imponendo il passaggio per P troviamo l'equazione $x + y + z = 2$ (si poteva vedere immediatamente che tale equazione compare in entrambe le forme cartesiane delle rette e quindi descrive un piano che contiene entrambe).

(4) Per $k=-1$, sappiamo già che i due insiemi sono rette affini. Cercandone un'intersezione, scriviamo

$$\begin{cases} x-y &= 1 \\ x-y+z &= 0 \\ -x+y+z &= 2 \\ y-2z &= 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-y &= 1 \\ z &= -1 \\ z &= 3 \\ y-2z &= 2 \end{cases}$$

dove abbiamo applicato due mosse di Gauss: $II \to II - I$ e $III \to III + I$. Si vede bene che il sistema è impossibile: il rango della matrice dei coefficienti è 3, il rango della matrice completa è 4. Da ciò si deduce anche che le due rette non sono parallele (altrimenti la matrice dei coefficienti avrebbe rango 2) e dunque le rette sono sghembe.

La giacitura di σ_{-1} è descritta dalle equazioni $x-y=0$ e $x-y+z=0$, ovvero è generata da $(1,1,0)^t$. D'altra parte la giactura di τ_{-1} è data da $-x+y+z=0$ e $y-2z=0$, da cui $x=3z$, $y=2z$; quindi è generata da $(3,2,1)^t$.

Per calcolarne la distanza, consideriamo l'ortogonale alla somma delle giaciture, che sarà un sottospazio di dimensione 1, generato dal vettore $(a,b,c)^t$ tale che

$$a+b=0 \qquad 3a+2b+c=0$$

ovvero $a=-b$ e $c=-a$, quindi ad esempio $v=(-1,1,1)^t$. Prendiamo un punto su ogni retta, ad esempio $A \equiv_{\mathcal{R}} (1,0,-1)$ su σ_{-1} e $B \equiv_{\mathcal{R}} (-3,0,-1)$ su τ_{-1}; la distanza è la lunghezza della proiezione del vettore $A-B=(4,0,0)$ lungo v:

$$\frac{|\langle A-B, v\rangle|}{\|v\|} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

(5) Sappiamo già che per $k=0$ i due sottospazi sono piani affini incidenti, quindi possiamo supporre $k \neq 0$. Scriviamo la matrice completa del sistema che descrive la loro intersezione e riduciamola a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1+k \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-k & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 0 & -k & k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & 2-k \\ 0 & 1 & 1-k & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & 2-k \\ 0 & 1 & 1-k & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

se $k \neq \pm 1$ possiamo moltiplicare la terza riga per $1-k^2$, sottrarvi la seconda e ottenere

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & 2-k \\ 0 & 0 & k^3 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & 2-k \\ 0 & 0 & k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1+k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & 2-k \\ 0 & 0 & k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & -1+k-k^2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $k \neq 0, \pm 1$, la matrice ha 4 pivot ($-1+k-k^2$ è sempre negativo e mai nullo) e dunque le due rette non si intersecano e hanno giaciture distinte, dunque sono sghembe. Per $k=1,-1$, sappiamo già che le due rette sono rispettivamente incidenti e sghembe.

Per $k=0$, abbiamo già visto che si tratta di due piani incidenti.

In alternativa, si poteva procedere calcolando il determinante della matrice completa, che è $k^2(k-1)^2$; così facendo si vede subito che per $k \neq 0,1$ le rette sono sghembe (perché la matrice completa ha rango 4) e i casi 0 e 1 sono noti dai punti precedenti.

Quesito teorico.

(1) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori di V, $n \geq 1$.
   (a) Quando i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono detti **generatori** di V? quando sono detti **linearmente indipendenti**? quando sono una base $\mathcal{B}$ di V?
   (b) Fissata una base $\mathcal{B}$ di V, definire le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e verificare che sono univocamente determinate.

(2) Siano A e B matrici quadrate $n \times n$ ad entrate in un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Quando A e B si dicono **simili**?
   (b) Verificare che se A e B sono simili allora hanno lo stesso **polinomio caratteristico**;
   (c) Stabilire se vale il viceversa: se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili?