**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 12 febbraio 2025 - TEMA 1**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

**Esercizio 1**

Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti razionali e si consideri la funzione

$$\Delta : V \longrightarrow V \quad \text{definita ponendo} \quad \Delta\left(\sum_{n=0}^{d} a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d = 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{d} n a_n x^{n-1} & \text{se } d \geq 1 \end{cases}$$

(1) Si dimostri che $\Delta$ è un endomorfismo di $V$ e si dica se $\Delta$ è iniettivo o suriettivo.
(2) Posto $V_4$ il sottospazio di $V$ dei polinomi di grado al più 4, si determini la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\Delta_4 := \Delta_{|V_4}$ di $V_4$ che è restrizione di $\Delta$ a $V_4$, relativamente ad un'opportuna base di $V_4$.
(3) Si esibiscano basi e dimensioni di $\ker \Delta_4$ e $\operatorname{Im} \Delta_4$. $\Delta_4$ è iniettivo o suriettivo?
(4) Si determinino gli autovalori e autovettori di $\Delta_4$ e si dica se è diagonalizzabile.

---

**Esercizio 2**

Si consideri la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 1 & h^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in funzione del parametro reale $h$.

(1) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di $A_h$ e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di $h$ la forma bilineare $\phi_h \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_h(X, Y) = {}^t X A_h Y$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di $\phi_h$.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica $\phi_h$ si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

---

**Esercizio 3**

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ fissiamo un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$ e consideriamo i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, -1, 2) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 0, 1) \quad C \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 0, 2) \quad D \equiv_{\mathcal{R}} (2, 0, -1, 1) \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (2, 1, 1, 1)\,.$$

(1) Determinare la dimensione e una forma parametrica e cartesiana del più piccolo sottospazio affine $\sigma$ che contiene $A$, $B$, $C$, $D$.
(2) Trovare la forma parametrica di un piano affine $\pi$ tale che $\pi \cap \sigma = \{A\}$ e $\pi \perp \sigma$.
(3) Sia $\ell$ la retta per $P$ e $B$; verificare che $\ell$ è perpendicolare a $\sigma$ e determinare la posizione reciproca di $\ell$ e $\pi$.
(4) Verificare che

$$(\operatorname{dist}(P, \sigma))^2 + (\operatorname{dist}(P, \pi))^2 = (\operatorname{dist}(P, A))^2\,.$$

---

**Quesito Teorico.**

(1) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ vettori di $V$, con $n \geq 2$.
   (a) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono detti *linearmente indipendenti* in $V$?
   (b) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono *un sistema di generatori* di $V$?
   (c) Fare un esempio di un insieme $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di generatori di uno spazio vettoriale $V$ che *non* siano linearmente indipendenti.

(2) Dare la definizione di *polinomio caratteristico* di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e verificare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(3) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo. Definire il *polinomio caratteristico* di $L$ e verificare che $\alpha \in \mathbb{K}$ è un *autovalore* di $L$ se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di $L$.

---

**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 12 febbraio 2025 - TEMA 2**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

**Esercizio 1**

Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti razionali e si consideri la funzione

$$\Delta : V \longrightarrow V \quad \text{definita ponendo} \quad \Delta\left(\sum_{n=0}^{d} a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{d} n(n-1)a_n x^{n-2} & \text{se } d \geq 2 \end{cases}$$

(1) Si dimostri che $\Delta$ è un endomorfismo di $V$ e si dica se $\Delta$ è iniettivo o suriettivo.
(2) Posto $V_4$ il sottospazio di $V$ dei polinomi di grado al più 4, si determini la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\Delta_4 := \Delta_{|V_4}$ di $V_4$ che è restrizione di $\Delta$ a $V_4$, relativamente ad un'opportuna base di $V_d$.
(3) Si esibiscano basi e dimensioni di $\ker \Delta_4$ e $\operatorname{Im} \Delta_4$. $\Delta_4$ è iniettivo o suriettivo?
(4) Si determinino gli autovalori e autovettori di $\Delta_4$ e si dica se è diagonalizzabile.

---

**Esercizio 2**

Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 & 1 \end{pmatrix}$, in funzione del parametro reale $k$.

(1) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di $A_k$ e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di $k$ la forma bilineare $\phi_k \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_k(X, Y) = {}^t X A_k Y$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di $\phi_k$.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica $\phi_k$ si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

---

**Esercizio 3**

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ fissiamo un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$ e consideriamo i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1,-1,1,2) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1,0,0,1) \quad C \equiv_{\mathcal{R}} (0,-1,0,2) \quad D \equiv_{\mathcal{R}} (2,0,1,1) \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (2,-1,-1,1)\,.$$

(1) Determinare la dimensione e una forma parametrica e cartesiana del più piccolo sottospazio affine $\sigma$ che contiene $A$, $B$, $C$, $D$.
(2) Trovare la forma parametrica di un piano affine $\pi$ tale che $\pi \cap \sigma = \{A\}$ e $\pi \perp \sigma$.
(3) Sia $\ell$ la retta per $P$ e $B$; verificare che $\ell$ è perpendicolare a $\sigma$ e determinare la posizione reciproca di $\ell$ e $\pi$.
(4) Verificare che

$$(\operatorname{dist}(P,\sigma))^2 + (\operatorname{dist}(P,\pi))^2 = (\operatorname{dist}(P,A))^2\,.$$

---

**Quesito Teorico.**

(1) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ vettori di $V$, con $n \geq 2$.
   (a) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono detti *linearmente dipendenti* in $V$?
   (b) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono *un sistema di generatori* di $V$?
   (c) Fare un esempio di un insieme $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di generatori di uno spazio vettoriale $V$ che siano linearmente dipendenti.

(2) Dare la definizione di *polinomio caratteristico* di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e verificare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(3) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ una base di $V$, $L\colon V \to V$ un endomorfismo e $A$ la matrice associata a $L$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia $\alpha \in \mathbb{K}$ un autovalore di $L$, definire l' *autospazio* $V_\alpha$ e verificare che $dim V_\alpha = n - rk(A - \alpha I_n)$.

---

**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 12 febbraio 2025 - TEMA 3**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

**Esercizio 1**

Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti razionali e si consideri la funzione

$$\nabla : V \longrightarrow V \quad \text{definita ponendo} \quad \nabla\left(\sum_{n=0}^{d} a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d = 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{d} \frac{a_n}{n} x^{n-1} & \text{se } d \geq 1 \end{cases}$$

(1) Si dimostri che $\nabla$ è un endomorfismo di $V$ e si dica se $\nabla$ è iniettivo o suriettivo.
(2) Posto $V_4$ il sottospazio di $V$ dei polinomi di grado al più 4, si determini la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\nabla_4 := \nabla_{|V_4}$ di $V_4$ che è restrizione di $\nabla$ a $V_4$, relativamente ad un'opportuna base di $V_4$.
(3) Si esibiscano basi e dimensioni di $\ker \nabla_4$ e $\operatorname{Im} \nabla_4$. $\nabla_4$ è iniettivo o suriettivo?
(4) Si determinino gli autovalori e autovettori di $\nabla_4$ e si dica se è diagonalizzabile.

---

**Esercizio 2**

Si consideri la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 1 & -h^2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in funzione del parametro reale $h$.

(1) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di $A_h$ e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di $h$ la matrice $A_h$ risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di $h$ la forma bilineare $\phi_h \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_h(X, Y) = {}^t X A_h Y$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di $\phi_h$.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica $\phi_h$ si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

---

**Esercizio 3**

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ fissiamo un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$ e consideriamo i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 1, 1, 2) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (-1, 0, 0, 1) \quad C \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 0, 2) \quad D \equiv_{\mathcal{R}} (-2, 0, 1, 1) \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (-2, 1, -1, 1)\,.$$

(1) Determinare la dimensione e una forma parametrica e cartesiana del più piccolo sottospazio affine $\sigma$ che contiene $A$, $B$, $C$, $D$.
(2) Trovare la forma parametrica di un piano affine $\pi$ tale che $\pi \cap \sigma = \{A\}$ e $\pi \perp \sigma$.
(3) Sia $\ell$ la retta per $P$ e $B$; verificare che $\ell$ è perpendicolare a $\sigma$ e determinare la posizione reciproca di $\ell$ e $\pi$.
(4) Verificare che

$$(\operatorname{dist}(P, \sigma))^2 + (\operatorname{dist}(P, \pi))^2 = (\operatorname{dist}(P, A))^2\,.$$

---

**Quesito Teorico.**

(1) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ vettori di $V$, con $n \geq 2$.
   (a) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono detti *linearmente indipendenti* in $V$?
   (b) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono *un sistema di generatori* di $V$?
   (c) Fare un esempio di un insieme $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di generatori di uno spazio vettoriale $V$ che *non* siano linearmente indipendenti.

(2) Dare la definizione di *polinomio caratteristico* di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e verificare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(3) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo. Definire il *polinomio caratteristico* di $L$ e verificare che $\alpha \in \mathbb{K}$ è un *autovalore* di $L$ se e solo se è una radice del polinomio caratteristico di $L$.

---

**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 12 febbraio 2025 - TEMA 4**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

**Esercizio 1**

Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti razionali e si consideri la funzione

$$\nabla : V \longrightarrow V \quad \text{definita ponendo} \quad \nabla\left(\sum_{n=0}^{d} a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{d} \frac{a_n}{n(n-1)} x^{n-2} & \text{se } d \geq 2 \end{cases}$$

(1) Si dimostri che $\nabla$ è un endomorfismo di $V$ e si dica se $\nabla$ è iniettivo o suriettivo.
(2) Posto $V_4$ il sottospazio di $V$ dei polinomi di grado al più 4, si determini la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\nabla_4 := \nabla_{|V_4}$ di $V_4$ che è la restrizione di $\nabla$ a $V_4$, relativamente ad un'opportuna base di $V_4$.
(3) Si esibiscano basi e dimensioni di $\ker \nabla_4$ e $\operatorname{Im} \nabla_4$. $\nabla_4$ è iniettivo o suriettivo?
(4) Si determinino gli autovalori e autovettori di $\nabla_4$ e si dica se è diagonalizzabile.

---

**Esercizio 2**

Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 1 \end{pmatrix}$, in funzione del parametro reale $k$.

(1) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di $A_k$ e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di $k$ la forma bilineare $\phi_k \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_k(X, Y) = {}^t X A_k Y$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di $\phi_k$.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica $\phi_k$ si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

---

**Esercizio 3**

Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ fissiamo un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$ e consideriamo i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1,1,1,-2) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1,0,0,-1) \quad C \equiv_{\mathcal{R}} (0,1,0,-2) \quad D \equiv_{\mathcal{R}} (2,0,1,-1) \quad P \equiv_{\mathcal{R}} (2,1,-1,-1)\,.$$

(1) Determinare la dimensione e una forma parametrica e cartesiana del più piccolo sottospazio affine $\sigma$ che contiene $A$, $B$, $C$, $D$.
(2) Trovare la forma parametrica di un piano affine $\pi$ tale che $\pi \cap \sigma = \{A\}$ e $\pi \perp \sigma$.
(3) Sia $\ell$ la retta per $P$ e $B$; verificare che $\ell$ è perpendicolare a $\sigma$ e determinare la posizione reciproca di $\ell$ e $\pi$.
(4) Verificare che

$$(\operatorname{dist}(P,\sigma))^2 + (\operatorname{dist}(P,\pi))^2 = (\operatorname{dist}(P,A))^2\,.$$

---

**Quesito Teorico.**

(1) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ vettori di $V$, con $n \geq 2$.
   (a) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono detti *linearmente dipendenti* in $V$?
   (b) Quando i vettori $\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n$ sono *un sistema di generatori* di $V$?
   (c) Fare un esempio di un insieme $\{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ di generatori di uno spazio vettoriale $V$ che siano linearmente dipendenti.

(2) Dare la definizione di *polinomio caratteristico* di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ e verificare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(3) Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ una base di $V$, $L\colon V \to V$ un endomorfismo e $A$ la matrice associata a $L$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia $\alpha \in \mathbb{K}$ un autovalore di $L$, definire l' *autospazio* $V_\alpha$ e verificare che $dim V_\alpha = n - rk(A - \alpha I_n)$.

---