Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 15 settembre 2026

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e sia $L\colon V \to V$ l'endomorfismo che rispetto alla base $\mathcal{B}$ si rappresenta con la matrice A.

(1) Determinare dimensione e una base dei sottospazi nucleo e immagine di L.
(2) Stabilire se l'endomorfismo L risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire se esiste, ed in caso affermativo determinarla, una base di V costituita da autovettori di L.
(4) Stabillire se le matrici A^2 e B sono simili.

Esercizio 2 Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la forma bilineare simmetrica $\varphi_k\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_k(X, Y) = {}^tXA_kY, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, per quali valori la forma φ_k è degenere e determinarne la segnatura.
(2) Stabilire per quali valori di k la forma φ_k è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.
(3) Posto $k = 0$, si consideri il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare una base di U ortogonale rispetto a φ_0.
(4) Determinare dimensione e una base del sottospazio $U^{\perp,\varphi_0}$ e stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp,\varphi_0}$.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro e consideriamo i punti

$$A_t =_{\mathcal{R}} (t, 1/t, 1) \qquad B_t =_{\mathcal{R}} (2t, 1/2t, -1)\,.$$

(1) Determinare una forma cartesiana della retta r_t passante per A_t e B_t.
(2) Determinare la posizione reciproca delle rette r_1 e r_{-1}.
(3) Determinare forma cartesiana e parametrica del piano π_1 passante per l'origine O e perpendicolare a r_1.
(4) Dimostrare che le rette r_{-1} e r_1 hanno la stessa distanza dall'origine.

Quesito teorico

(1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e sia $L\colon V \to V$ un endomorfismo di V.
   (a) Si dia la definizione di autovalore di L.
   (b) Sia α un autovalore di L, si definisca l'autospazio assciato all'autovalore α e si verifichi che è un sottospazio di V.
(2) Si trovi un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ con un autospazio di dimensione 3 che non sia diagonalizzabile.
(3) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$.
   (a) Si dia la definizione di prodotto scalare ϕ su V.
   (b) Fissata una base $\mathcal{B}$ di V si definisca la matrice associata al prodotto scalare ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si ricavi l'espressione matriciale di ϕ.