Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 15 settembre 2025

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si considerino il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ ed il vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) Determinare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Determinare un' applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $kerL = W$ e $L(\mathbf{u}) = \mathbf{2u}$. Stabilire se tale applicazione è unica.
(3) Determinare gli autovalori di L e le equazioni degli autospazi di L. Stabilire se L è diagonalizzabile.
(4) Scrivere la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$ associata a L rispetto alla base $\mathcal{B}$ fissata nel punto (1).

Esercizio 2 Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U_k : \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_4 = 0 \\ kx_1 + x_3 + kx_4 = 0 \end{cases} \qquad V_k : \begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ kx_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Determinare le dimensioni di U_k, V_k e $U_k \cap V_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Dato un riferimento $\mathcal{R} = \{O, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$ nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, sia $P \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ dato da $P \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, -1, 0)$. Determinare la posizione reciproca dei piani affini $\pi_k = O + U_k$ e $\sigma_k = P + V_k$ al variare di k.
(3) Dire se esiste un valore di k per il quale π_k e σ_k siano contenuti in un medesimo iperpiano affine H e, in caso affermativo, determinare l'equazione cartesiana di H e una base della sua giacitura.

Esercizio 3 Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base.

(1) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $T : V \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Calcolare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di T e trovare, se esiste, un vettore w non nullo tale che $T(w) = 0$.
(3) Dimostrare che $\phi(v, w) = (T(v))^t \cdot T(w)$ (dove $\cdot$ è il prodotto riga per colonna) è una forma bilineare simmetrica su V e calcolarne la segnatura.
(4) Dimostrare che $\{v_1 + v_2,\ v_1 - v_2,\ w\}$ è una base ortogonale di V rispetto a ϕ.

Quesito teorico.

(1) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di **applicazione lineare** $L\colon V \to W$;
   (b) se $dimV = n$ e $dimW = m$, fissate una base $\mathcal{B}_V$ di V e una base $\mathcal{B}_W$ di W, definire la matrice A associata all'applicazione lineare L rispetto alle basi fissate.

(2) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
   (a) Sia $W \subset V$, definire l'insieme ortogonale $W^\perp$ e verificare che è un sottospazio di V;
   (b) stabilire se $W \oplus W^\perp = V$.