Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 16 giugno 2026

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

dipendente dal parametro reale h.

(1) Determinare il rango di A_h al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

(2) Posto $h = 1$, si consideri l'endomorfismo

$$L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice A_1. Determinare una base e una rappresentazione cartesiana dei sottospazi $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$.

(3) Determinare gli autovalori di L e, per ciascuno di essi, una base del relativo autospazio. Stabilire infine se L sia diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di L.

(4) Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$, determinarne le coordinate rispetto alla base di $\operatorname{Im} L$ scelta nel punto precedente e trovare una rappresentazione parametrica del sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 2 Si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^4 \quad \varphi(X,Y) = {}^tXAY, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che φ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

(2) Determinare una base ortogonale rispetto a φ del sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(3) Determinare dimensione ed una base del sottospazio $U^{\perp,\varphi}$ (sottospazio ortogonale ad U rispetto a φ).

(4) Completare la base trovata al punto (2) ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo E^4, opportunamente riferito, siano dati i punti

$$A = (1,2,3,0), \qquad B = (2,3,4,0), \qquad C = (1,1,0,1),$$

e sia π il sottospazio affine dato da $x_1 = x_2 + x_3 - 1 = 0$.

Sia poi σ il piano affine passante per A e B e perpendicolare a π.

(1) Determinare una forma parametrica per π e una forma cartesiana per σ.

(2) Dimostrare che π e σ sono incidenti e determinarne l'intersezione D.

(3) Determinare un punto $E \in \sigma$ tale che i segmenti ED ed EC siano ortogonali, con $d(E,D) = 1$.

(4) Mostrare che la retta passante per E e C è parallela a π e ha distanza 1 da π.

Quesito teorico.

(1) Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di immagine di L (ImL);
   (b) verificare che ImL è un sottospazio di W;
   (c) siano V e W di dimensione finita, verificare che $\dim ImL = rk(A)$, dove A è la matrice che rappresenta L, fissate una base in V ed una base in W.

(2) (a) Dare la definizione di matrici simili.
   (b) Verificare che due matrici simili hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche.
   (c) Fare un esempio di due matrici che hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche ma non sono siimili.