Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 16 giugno 2025

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Definiamo $T : V \to V$ come

$$T(p(x)) = p(x) + p(3 - x)$$

Ad esempio: $T(x + 1) = (x + 1) + ((3 - x) + 1) = 5$.

(1) Verificare che T è lineare e dire se è un isomorfismo.
(2) Determinare dimensioni e basi di nucleo e immagine di T.
(3) Sia $W = \mathrm{Span}\{x, x^2 + 1\}$; determinare la dimensione e una base di $W \cap \mathrm{Im}\, T$.
(4) Dire se T è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una base formata da autovettori di T.

Esercizio 2 Si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\phi_h \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\phi_h(X, Y) = {}^tX A_h Y, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale h.

(1) Stabilire, al variare di h, se ϕ_h è degenere o non degenere e determinare la segnatura di ϕ_h.
(2) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a ϕ_h.
(3) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + y - z = 0$. Determinare la dimensione ed una base per il sottospazio $W^{\perp_h}$ (ortogonale a W rispetto a ϕ_h), al variare di h.
(4) Stabilire per quali valori di h W e $W^{\perp_h}$ sono in somma diretta.

Esercizio 3 Fissato nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R}$, considerare il sottoinsieme $S_k \subset \mathbb{E}^4$ definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Verificare S_k è un sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$, determinare dimensione e una base per la giacitura di S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Verificare che esiste uno ed un solo k tale il sottospazio affine S_k contenga il punto $A \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 0, 0)$, determinare una rappresentazione parametrica di tale sottospazio.
(3) Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano H passante per il punto A e ortogonale alla retta affine r di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.
(4) Verificare che S_k e H sono paralleli per ogni valore di k, stabilire per quali valori di k risulta S_k contenuto in H.

Quesito teorico.

Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

(1) Dare la definizione di applicazione lineare $L \colon V \to W$.
(2) Definire nucleo e immagine di L.
(3) Stabilire, giustificando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) L trasforma vettori linearmente dipendenti di V in vettori linearmente dipendenti di W;
   (b) L trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W.
(4) Dimostrare che L è un isomorfismo se e solo se manda una base di V in una base di W.