Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 20 aprile 2026

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k & 0 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro reale k.

(1) Determinare il rango di A_k al variare del parametro reale k.
(2) Posto $k = 0$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice A_0. Determinare le equazioni cartesiane e una base per i sottospazi $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$.
(3) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, verificare che $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$, determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\operatorname{Im} L$ scelta nel punto precedente.
(4) Scrivere una rappresentazione parametrica per il sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale h.

(1) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_h e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di h la matrice A_h risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di h la forma bilineare $\phi_h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_h(X, Y) = {}^tXA_hY$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di ϕ_h.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica ϕ_h si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito si considerino i punti

$$A = (0,1,0,0) \qquad B = (2,0,0,0) \qquad C = (1,0,1,1) \qquad D = (2,0,0,1)\ .$$

(1) Determinare la dimensione e una rappresentazione cartesiana di σ, il più piccolo sottospazio affine che contiene B, C, D.
(2) Determinare la posizione reciproca di σ e della retta r che passa per A e per l'origine del sistema di riferimento.
(3) Trovare una rappresentazione parametrica della retta s passante per l'origine e ortogonale a r e a σ.
(4) Determinare $s \cap \sigma$ e calcolare la distanza tra r e σ.

Quesito teorico.

(1) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale del dominio.
(2) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a entrate reali.
   (a) Dare la definizione di autovalore di A.
   (b) Sapendo che $A^3 = 0$ e $A \neq 0$, dimostare che l'unico autovalore di A è 0 e concludere che A non è diagonalizzabile
(3) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
   (a) Dire cosa significa che b è indefinita.
   (b) Fare un esempio di forma bilineare simmetrica indefinita e degenere.