Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 23 febbraio 2026- TEMA 1

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, considerare il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

(1) Determinare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Verificare che esiste un endomorfismo $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che
$$kerL = W, \quad L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad L(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4;$$
stabilire se L è unico. Determinare una rappresentazione cartesiana per il sottospazio ImL.
(3) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_c}(L)$ associata a L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$.
(4) Determinare una rappresentazione parametrica per il sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Esercizio 2 Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e siano
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$
Definiamo la funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ come
$$T(X) = \langle X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2X .$$
(1) Dimostrare che T è lineare e simmetrica e trovarne la matrice associata A rispetto alla base canonica.
(2) Trovare la dimensione e una base di $W = (\mathrm{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^{\perp}$ e mostrare che i suoi vettori non nulli sono autovettori di T.
(3) Trovare una base ortonormale di autovettori di T.
(4) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $b(X, Y) = \langle X, (A + kI)Y \rangle$ è definita positiva su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito, si considerino i punti di coordinate
$$A \equiv (1, 0, 1, 2) , \quad B \equiv (3, 1, 0, 2) , \quad C \equiv (2, 2, 1, 1) , \quad D \equiv (0, 1, 2, 3)$$
il sottospazio affine $S = A + \mathrm{span}(u, v)$, essendo $u := B - A$ e $v := C - A$, e la retta affine
$$r = D + \mathrm{span}(w) , \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
(1) Si determini la dimensione di S e le sue equazioni cartesiane.
(2) Si studi la posizione reciproca di r e S.
(3) Si dice se esiste un iperpiano contenente sia r che S, scrivendone l'eventuale equazione cartesiana.
(4) Si calcoli la distanza tra il punto D e il sottospazio affine H di direzione generata da u, v, w e passante per l'origine del riferimento.

Quesito teorico.

(1) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ e siano U e W sottospazi di V.
  (a) Definire $U + W$;
  (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V;
  (c) stabilire se è vero che $U + W = U \cup W$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo di V.
  (a) dare la definizione di autovettore di L;
  (b) dare la definizione di matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ associata a L rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V;
  (c) verificare che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ è una matrice diagonale se e solo se la base $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori di L.

Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 23 febbraio 2026- TEMA 2

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, considerare il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

(1) Determinare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Verificare che esiste un endomorfismo $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che
$$kerL = W, \quad L(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad L(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4;$$
stabilire se L è unico. Determinare una rappresentazione cartesiana per il sottospazio ImL.
(3) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_c}(L)$ associata a L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$.
(4) Determinare una rappresentazione parametrica per il sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

Esercizio 2 Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e siano
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} .$$
Definiamo la funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ come
$$T(X) = \langle X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 3X .$$
(1) Dimostrare che T è lineare e simmetrica e trovarne la matrice associata A rispetto alla base canonica.
(2) Trovare la dimensione e una base di $W = (\mathrm{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^{\perp}$ e mostrare che i suoi vettori non nulli sono autovettori di T.
(3) Trovare una base ortonormale di autovettori di T.
(4) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $b(X, Y) = \langle X, (A + kI)Y \rangle$ è definita positiva su $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito, si considerino i punti di coordinate
$$A \equiv (2, -1, 0, 1) , \quad B \equiv (4, 0, -1, 1) , \quad C \equiv (3, 1, 0, 0) , \quad D \equiv (1, 2, 1, 2)$$
il sottospazio affine $S = A + \mathrm{span}(u, v)$, essendo $u := B - A$ e $v := C - A$, e la retta affine
$$r = D + \mathrm{span}(w) , \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$
(1) Si determini la dimensione di S e le sue equazioni cartesiane.
(2) Si studi la posizione reciproca di r e S.
(3) Si dica se esiste un iperpiano contenente sia r che S, scrivendone l'eventuale equazione cartesiana.
(4) Si calcoli la distanza tra il punto D e il sottospazio affine H di direzione generata da u, v, w e passante per l'origine del riferimento.

Quesito teorico.

(1) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ e siano U e W sottospazi di V.
  (a) Definire $U + W$;
  (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V;
  (c) stabilire se è vero che $dim(U + W) = dim(U) + dim(W)$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo di V.
  (a) dare la definizione di autovettore di L;
  (b) dare la definizione di matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ associata a L rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V;
  (c) verificare che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L)$ è una matrice diagonale se e solo se la base $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori di L.