Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 febbraio 2025 - TEMA 1

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di V, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & h \\ 1 & h & -2 \end{pmatrix}$$

(1) In dipendenza di h, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(2) Si dica per quali valori di h si ha che f_h è un automorfismo di V.
(3) In dipendenza di h si dica quando A_h è diagonalizzabile.
(4) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

Esercizio 2

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche reali e sia $W \subseteq V$ il sottospazio delle matrici diagonali. Definiamo $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ come $\phi(A, B) = \mathrm{tr}(AMB)$ dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{tr}(X)$ è la traccia della matrice X.

(1) Dimostrare che ϕ è una forma bilineare, fissare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice associata a ϕ rispetto a tale base.
(2) Dimostrare che ϕ è simmetrica, verificare che la restrizione $\phi|_W$ di ϕ a W è definita positiva e trovare una base ortogonale di W per ϕ.
(3) Dimostrare che $W^\perp = \{X \in V \ : \ \phi(X, D) = 0 \quad \forall\, D \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V e trovarne una base e la dimensione.
(4) Determinare la segnatura di ϕ.

Esercizio 3

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, considerare i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, 0, 0) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 1, 0)$$

e il sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^4$ definito dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases} .$$

(1) Determinare la dimensione di S, la giacitura di S e una rappresentazione parametrica per S.
(2) Sia l la retta affine per i punti A e B. Determinare la posizione reciproca di l e S.
(3) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene S e l. Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(4) Sia n la retta affine per A ortogonale a H. Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana di n.

Quesito Teorico.

(1) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$;
   (b) sia $L\colon V \to W$ un' applicazione lineare:
   - verificare che $L(0_V) = 0_W$;
   - siano $\{v_1, \cdots, v_n\}$ vettori *linearmente dipendenti* di V, stabilire se $\{L(v_1), \cdots, L(v_n)\}$ sono linearmente dipendenti in W.

(2) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Definire $U + W$;
   (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V.

(3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Grassmann.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 febbraio 2025 - TEMA 2

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di V, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & h \\ 1 & h & -3 \end{pmatrix}$$

(1) In dipendenza di h, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(2) Si dica per quali valori di h si ha che f_h è un automorfismo di V.
(3) In dipendenza di h si dica quando A_h è diagonalizzabile.
(4) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

Esercizio 2

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche reali e sia $W \subseteq V$ il sottospazio delle matrici diagonali. Definiamo $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ come $\phi(A, B) = \mathrm{tr}(AMB)$ dove

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{tr}(X)$ è la traccia della matrice X.

(1) Dimostrare che ϕ è una forma bilineare, fissare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice associata a ϕ rispetto a tale base.
(2) Dimostrare che ϕ è simmetrica, verificare che la restrizione $\phi|_W$ di ϕ a W è definita negativa e trovare una base ortogonale di W per ϕ.
(3) Dimostrare che $W^{\perp} = \{X \in V \ : \ \phi(X, D) = 0 \quad \forall\, D \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V e trovarne una base e la dimensione.
(4) Determinare la segnatura di ϕ.

Esercizio 3

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, considerare i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, 0, 0) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 1, 0)$$

e il sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^4$ definito dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases} .$$

(1) Determinare la dimensione di S, la giacitura di S e una rappresentazione parametrica per S.
(2) Sia l la retta affine per i punti A e B. Determinare la posizione reciproca di l e S.
(3) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene S e l. Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(4) Sia n la retta affine per A ortogonale a H. Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana di n.

Quesito Teorico.

(1) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$;
   (b) sia $L\colon V \to W$ un' applicazione lineare:
   - verificare che $L(0_V) = 0_W$;
   - siano $\{v_1, \cdots, v_n\}$ vettori *linearmente indipendenti* di V, stabilire se $\{L(v_1), \cdots, L(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.

(2) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Definire $U + W$;
   (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V.

(3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Grassmann.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 febbraio 2025 - TEMA 3

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di V, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & h \\ 1 & h & -4 \end{pmatrix}$$

(1) In dipendenza di h, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(2) Si dica per quali valori di h si ha che f_h è un automorfismo di V.
(3) In dipendenza di h si dica quando A_h è diagonalizzabile.
(4) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

Esercizio 2

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche reali e sia $W \subseteq V$ il sottospazio delle matrici diagonali. Definiamo $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ come $\phi(A, B) = \mathrm{tr}(AMB)$ dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{tr}(X)$ è la traccia della matrice X.

(1) Dimostrare che ϕ è una forma bilineare, fissare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice associata a ϕ rispetto a tale base.
(2) Dimostrare che ϕ è simmetrica, verificare che la restrizione $\phi|_W$ di ϕ a W è definita positiva e trovare una base ortogonale di W per ϕ.
(3) Dimostrare che $W^\perp = \{X \in V \ : \ \phi(X, D) = 0 \quad \forall\, D \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V e trovarne una base e la dimensione.
(4) Determinare la segnatura di ϕ.

Esercizio 3

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, considerare i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 1, 0) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 1, 0, 0)$$

e il sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^4$ definito dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases} .$$

(1) Determinare la dimensione di S, la giacitura di S e una rappresentazione parametrica per S.
(2) Sia l la retta affine per i punti A e B. Determinare la posizione reciproca di l e S.
(3) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene S e l. Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(4) Sia n la retta affine per A ortogonale a H. Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana di n.

Quesito Teorico.

(1) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$;
   (b) sia $L\colon V \to W$ un' applicazione lineare:
   - verificare che $L(0_V) = 0_W$;
   - siano $\{v_1, \cdots, v_n\}$ vettori *linearmente dipendenti* di V, stabilire se $\{L(v_1), \cdots, L(v_n)$ sono linearmente dipendenti in W.

(2) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Definire $U + W$;
   (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V.

(3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Grassmann.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 febbraio 2025 - TEMA 4

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di V, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & h \\ 1 & h & -5 \end{pmatrix}$$

(1) In dipendenza di h, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(2) Si dica per quali valori di h si ha che f_h è un automorfismo di V.
(3) In dipendenza di h si dica quando A_h è diagonalizzabile.
(4) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

Esercizio 2

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche reali e sia $W \subseteq V$ il sottospazio delle matrici diagonali. Definiamo $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ come $\phi(A, B) = \mathrm{tr}(AMB)$ dove

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{tr}(X)$ è la traccia della matrice X.

(1) Dimostrare che ϕ è una forma bilineare, fissare una base $\mathcal{B}$ di V e determinare la matrice associata a ϕ rispetto a tale base.
(2) Dimostrare che ϕ è simmetrica, verificare che la restrizione $\phi|_W$ di ϕ a W è definita negativa e trovare una base ortogonale di W per ϕ.
(3) Dimostrare che $W^{\perp} = \{X \in V \ : \ \phi(X, D) = 0 \quad \forall\, D \in W\}$ è un sottospazio vettoriale di V e trovarne una base e la dimensione.
(4) Determinare la segnatura di ϕ.

Esercizio 3

Fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, considerare i punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 0, 1) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 1, 0)$$

e il sottospazio affine $S \subset \mathbb{E}^4$ definito dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases} .$$

(1) Determinare la dimensione di S, la giacitura di S e una rappresentazione parametrica per S.
(2) Sia l la retta affine per i punti A e B. Determinare la posizione reciproca di l e S.
(3) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene S e l. Determinare una rappresentazione cartesiana di H.
(4) Sia n la retta affine per A ortogonale a H. Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana di n.

Quesito Teorico.

(1) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di applicazione lineare $L\colon V \to W$;
   (b) sia $L\colon V \to W$ un' applicazione lineare:
   - verificare che $L(0_V) = 0_W$;
   - siano $\{v_1, \cdots, v_n\}$ vettori *linearmente indipendenti* di V, stabilire se $\{L(v_1), \cdots, L(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.

(2) Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Definire $U + W$;
   (b) verificare che $U + W$ è un sottospazio di V.

(3) Enunciare e dimostrare il Teorema di Grassmann.