Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 gennaio 2025 - TEMA 1

Nome e Cognome: **Matricola:**

---

(1) Sia $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$. Fissata una matrice $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ non nulla, si consideri l'applicazione:

$$L_B \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$$

data da $L_B(A) = Tr(A).B$, dove $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ indica la traccia di A.

(a) Verificare L_B è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare dimensione e una base per i sottospazi $kerL_B$ e ImL_B.

(b) Determinare gli autovalori di L_B e verificare che L_B è diagonalizzabile se e solo se $tr(B) \neq 0$.

(c) Posto $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, fissare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B)$.

---

(2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Si ponga

$$\phi(p,q) = -2\left[p(0)q(1) + p(1)q(0)\right] + \left[p(0)q(-1) + p(-1)q(0)\right] + \frac{1}{2}\left[p(1)q(-1) + p(-1)q(1)\right] \ .$$

(a) Verificare che ϕ è una forma bilineare simmetrica, trovarne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ e calcolarne la segnatura.

(b) Si completi $\{x^2\}$ a una base ortogonale rispetto a ϕ.

(c) Si dimostri che $U = \{p(x) \in V \ : \ \phi(p(x), x + x^2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovino la dimensione e una base.

(d) Posto $W_k = \langle 1 - x, x + kx^2 \rangle_{\mathbb{R}}$, si determini per quali k la restrizione di ϕ a W_k è definita positiva.

---

(3) Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito ad un riferimento ortonormale, si considerino la retta

$$r_t = P_t + \langle v_t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{essendo} \quad P_t \equiv (1+t, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ -t \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

e il sotto-spazio affine π di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane di r_t e le equazioni parametriche di π.

(b) Al variare del parametro reale t si studi la posizione reciproca di r_t e π

(c) Per $t = 1$ si determini la distanza $d(r_1, \pi)$ tra la retta r_1 e il piano π.

---

(4) **Quesito Teorico.** Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Dare la definizione di nucleo e immagine di un' applicazione lineare $L \colon V \to W$.

(b) Verificare che $kerL$ è un sottospazio di V.

(c) Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità-rango.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 gennaio 2025 - TEMA 2

Nome e Cognome: **Matricola:**

---

(1) Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$. Fissata una matrice $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ non nulla, si consideri l'applicazione:

$$L_B \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$$

data da $L_B(A) = 2Tr(A).B$, dove $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ indica la traccia di A.

(a) Verificare L_B è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare dimensione e una base per i sottospazi $ker L_B$ e $Im L_B$.

(b) Determinare gli autovalori di L_B e verificare che L_B è diagonalizzabile se e solo se $tr(B) \neq 0$.

(c) Posto $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, fissare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B)$.

---

(2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Si ponga

$$\phi(p,q) = [p(0)q(1) + p(1)q(0)] - 2\,[p(0)q(-1) + p(-1)q(0)] + \frac{1}{2}\,[p(1)q(-1) + p(-1)q(1)] \ .$$

(a) Verificare che ϕ è una forma bilineare simmetrica, trovarne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ e calcolarne la segnatura.

(b) Si completi $\{x^2\}$ a una base ortogonale rispetto a ϕ.

(c) Si dimostri che $U = \{p(x) \in V \ : \ \phi(p(x), 2x + 2x^2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovino la dimensione e una base.

(d) Posto $W_k = \langle 1 + x, 2x + kx^2 \rangle_{\mathbb{R}}$, si determini per quali k la restrizione di ϕ a W_k è definita positiva.

---

(3) Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito ad un riferimento ortonormale, si considerino la retta

$$r_t = P_t + \langle v_t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{essendo} \quad P_t \equiv (t,1,1,1) \quad \text{e} \quad v_t = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

e il sotto-spazio affine π di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane di r_t e le equazioni parametriche di π.

(b) Al variare del parametro reale t si studi la posizione reciproca di r_t e π

(c) Per $t = 2$ si determini la distanza $d(r_2, \pi)$ tra la retta r_2 e il piano π.

---

(4) **Quesito Teorico.** Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Dare la definizione di nucleo e immagine di un' applicazione lineare $L \colon V \to W$.

(b) Verificare che $Im L$ è un sottospazio di W.

(c) Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità-rango.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 gennaio 2025 - TEMA 3

Nome e Cognome: **Matricola:**

---

(1) Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$. Fissata una matrice $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ non nulla, si consideri l'applicazione:

$$L_B \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$$

data da $L_B(A) = 3Tr(A).B$, dove $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ indica la traccia di A.

(a) Verificare L_B è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare dimensione e una base per i sottospazi $kerL_B$ e ImL_B.

(b) Determinare gli autovalori di L_B e verificare che L_B è diagonalizzabile se e solo se $tr(B) \neq 0$.

(c) Posto $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, fissare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B)$.

---

(2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Si ponga

$$\phi(p,q) = -3\left[p(0)q(1) + p(1)q(0)\right] + 2\left[p(0)q(-1) + p(-1)q(0)\right] + \frac{1}{2}\left[p(1)q(-1) + p(-1)q(1)\right] \ .$$

(a) Verificare che ϕ è una forma bilineare simmetrica, trovarne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ e calcolarne la segnatura.

(b) Si completi $\{x^2\}$ a una base ortogonale rispetto a ϕ.

(c) Si dimostri che $U = \{p(x) \in V \ : \ \phi(p(x), x + x^2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovino la dimensione e una base.

(d) Posto $W_k = \langle 1 - x, x + kx^2 \rangle_{\mathbb{R}}$, si determini per quali k la restrizione di ϕ a W_k è definita positiva.

---

(3) Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito ad un riferimento ortonormale, si considerino la retta

$$r_t = P_t + \langle v_t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{essendo} \quad P_t \equiv (2+t, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_t = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ -1-t \\ -1-t \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

e il sotto-spazio affine π di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane di r_t e le equazioni parametriche di π.

(b) Al variare del parametro reale t si studi la posizione reciproca di r_t e π

(c) Per $t = 1$ si determini la distanza $d(r_1, \pi)$ tra la retta r_1 e il piano π.

---

(4) **Quesito Teorico.** Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Dare la definizione di nucleo e immagine di un' applicazione lineare $L \colon V \to W$.

(b) Verificare che $kerL$ è un sottospazio di V.

(c) Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità-rango.

Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 27 gennaio 2025 - TEMA 4

Nome e Cognome: **Matricola:**

---

(1) Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$. Fissata una matrice $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ non nulla, si consideri l'applicazione:

$$L_B \colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$$

data da $L_B(A) = 4Tr(A).B$, dove $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ indica la traccia di A.

(a) Verificare L_B è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare dimensione e una base per i sottospazi $ker L_B$ e $Im L_B$.

(b) Determinare gli autovalori di L_B e verificare che L_B è diagonalizzabile se e solo se $tr(B) \neq 0$.

(c) Posto $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, fissare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B)$.

---

(2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Si ponga

$$\phi(p,q) = 2\left[p(0)q(1) + p(1)q(0)\right] - 3\left[p(0)q(-1) + p(-1)q(0)\right] + \frac{1}{2}\left[p(1)q(-1) + p(-1)q(1)\right] \ .$$

(a) Verificare che ϕ è una forma bilineare simmetrica, trovarne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ e calcolarne la segnatura.

(b) Si completi $\{x^2\}$ a una base ortogonale rispetto a ϕ.

(c) Si dimostri che $U = \{p(x) \in V \ : \ \phi(p(x), 2x + 2x^2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovino la dimensione e una base.

(d) Posto $W_k = \langle 1 + x, 2x + kx^2 \rangle_{\mathbb{R}}$, si determini per quali k la restrizione di ϕ a W_k è definita positiva.

---

(3) Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito ad un riferimento ortonormale, si considerino la retta

$$r_t = P_t + \langle v_t \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{essendo} \quad P_t \equiv (1-t, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

e il sotto-spazio affine π di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane di r_t e le equazioni parametriche di π.

(b) Al variare del parametro reale t si studi la posizione reciproca di r_t e π

(c) Per $t = 1$ si determini la distanza $d(r_1, \pi)$ tra la retta r_1 e il piano π.

---

(4) **Quesito Teorico.** Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Dare la definizione di nucleo e immagine di un' applicazione lineare $L \colon V \to W$.

(b) Verificare che $Im L$ è un sottospazio di W.

(c) Enunciare e dimostrare il Teorema di nullità-rango.