**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 3 febbraio 2026 - TEMA 1**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

(1) Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $V$, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ -1 & 1 & h \\ -1 & h & 1 \end{pmatrix}$$

(a) In dipendenza di $h$, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(b) Si dica per quali valori di $h$ si ha che $f_h$ è un automorfismo di $V$.
(c) In dipendenza di $h$ si dica quando $A_h$ è diagonalizzabile.
(d) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile $B$ tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

---

(2) Sia $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$; si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Mostrare che $e_1 + e_2 + e_3$ è autovettore di $B$ e calcolarne il relativo autovalore.
(b) Trovare una base di autovettori di $B$ e la corrispondente forma diagonale.
(c) Definita la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come $b(x, y) = x^t B y$, dimostrare che $U = \{v \in \mathbb{R}^3 \ :\ b(v, e_1 + e_2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale e trovarne una base e la dimensione.
(d) Sia $W_t = \mathrm{Span}\{e_1 + e_2 + te_3, e_2 - e_3\}$; al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la segnatura della restrizione di $b$ a $W_t$.

---

(3) Fissato un riferimento affine ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, si considerino il punto $A \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 1, 0)$, la retta affine $r$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ ed il sottospazio affine $S$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$

(a) Determinare la dimensione di $S$, una rappresentazione parametrica di $S$ e una base per la giacitura si $S$.
(b) Sia $T$ il piú piccolo sottospazio affine contenente il punto $A$ e la retta $r$. Determinare la dimensione di $T$, verificare che $T$ e $S$ sono incidenti e ortogonali.
(c) Stabilire se esiste un iperpiano $H$ che contiene i sottospazi $S$ e $T$.
(d) Calcolare la distanza $d(A, r)$.

**Quesito Teorico.**

(1) Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{R}$. Si dica se esiste un endomorfimo di $V$ con un numero minore di $n$ di autovalori distinti e, nel caso la risposta sia positiva, se ne dia un esempio.

(2) Si dica, giustificando ogni affermazione, se:
   (a) due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico;
   (b) due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

(3) Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo di $V$. Verificare che $\alpha \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $L$ se e solo se $\alpha$ è una radice del polinomio caratteristico di $A$, dove $A$ è la matrice associata a $L$ rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di $V$.

**Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 3 febbraio 2026 - TEMA 2**

**Nome e Cognome:** **Matricola:**

---

(1) Sia $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $V$, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ -1 & 2 & h \\ -1 & h & 2 \end{pmatrix}$$

(a) In dipendenza di $h$, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.
(b) Si dica per quali valori di $h$ si ha che $f_h$ è un automorfismo di $V$.
(c) In dipendenza di $h$ si dica quando $A_h$ è diagonalizzabile.
(d) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile $B$ tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

---

(2) Sia $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$; si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrare che $e_1 + e_2 + e_3$ è autovettore di $B$ e calcolarne il relativo autovalore.
(b) Trovare una base di autovettori di $B$ e la corrispondente forma diagonale.
(c) Definita la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come $b(x, y) = x^t B y$, dimostrare che $U = \{v \in \mathbb{R}^3 \ :\ b(v, e_2 + e_3) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale e trovarne una base e la dimensione.
(d) Sia $W_t = \mathrm{Span}\{e_1 - e_2, te_1 + e_2 + e_3\}$; al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la segnatura della restrizione di $b$ a $W_t$.

---

(3) Fissato un riferimento affine ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, si considerino il punto $A \equiv_{\mathcal{R}} (2, -1, 0, 1)$, la retta affine $r$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ ed il sottospazio affine $S$ di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

(a) Determinare la dimensione di $S$, una rappresentazione parametrica di $S$ e una base per la giacitura si $S$.
(b) Sia $T$ il piú piccolo sottospazio affine contenente il punto $A$ e la retta $r$. Determinare la dimensione di $T$, verificare che $T$ e $S$ sono incidenti e ortogonali.
(c) Stabilire se esiste un iperpiano $H$ che contiene i sottospazi $S$ e $T$.
(d) Calcolare la distanza $d(A, r)$.

**Quesito Teorico.**

(1) Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{R}$. Si dica se esiste un endomorfimo di $V$ con un numero minore di $n$ di autovalori distinti e, nel caso la risposta sia positiva, se ne dia un esempio.

(2) Si dica, giustificando ogni affermazione, se:
   (a) due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico;
   (b) due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

(3) Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo di $V$. Verificare che $\alpha \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $L$ se e solo se $\alpha$ è una radice del polinomio caratteristico di $A$, dove $A$ è la matrice associata a $L$ rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di $V$.