Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 7 luglio 2026

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U_k = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\k+1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\k+1\\k\end{pmatrix}\right\} \qquad W_k : \begin{cases} x_1 = 0 \\ kx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(1) Determinare la dimensione di $U_k + W_k$ e $U_k \cap W_k$ in funzione di k.
(2) Per $k = -2$, trovare una forma cartesiana di $U_{-2} \cap W_{-2}$ e una base di $U_{-2} + W_{-2}$.
(3) Per $k = -1$, determinare una matrice A tale che, l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da $T(X) = AX$, verifichi le seguenti condizioni:

$$\ker T = U_{-1} \quad ImT = U_{-1}.$$

(4) Discutere la diagonalizzabilità di T.

Esercizio 2 Sia $h \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\varphi_h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_h(X,Y) = {}^tXA_hY, \qquad A_h = \begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&h\\0&0&h&1\end{pmatrix}.$$

(1) Stabilire, al variare di $h \in \mathbb{R}$, se φ_h è degenere o non degenere e determinarne la segnatura.
(2) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a φ_h.
(3) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Posto $h = 1$, determinare dimensione e una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale a U rispetto a φ_1.
(4) Stabilire se i sottospazi U e $U^\perp$ sono in somma diretta e se si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia π il sottospazio affine generato dai punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1,0,1,0) \quad B \equiv_{\mathcal{R}} (1,0,0,0) \quad C \equiv_{\mathcal{R}} (0,0,1,1).$$

(1) Determinare la dimensione di π, una rappresentazione parametrica e cartesiana per π.
(2) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene π e l'origine O. Determinare l'equazione cartesiana di H.
(3) Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana del piano affine α per O ortogonale a π.
(4) Determinare la distanza di O dal piano π.

Quesito teorico.

(1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia ϕ un prodotto scalare su V.
   (a) Dare la definizione di prodotto scalare;
   (b) dato U sottospazio vettoriale di V, definire $U^\perp$ e dimostrare che è un sottospazio vettoriale;
   (c) dimostrare che $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(2) Siano U, V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dire cosa significa che $T : U \to V$ è lineare.
   (b) Dimostrare che se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ sono lineari, allora $S \circ T$ è lineare.
   (c) Trovare un esempio di applicazione lineare $T : U \to V$, che non sia l'identità, e di due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ di U, V tali che la matrice associata a T rispetto ad esse sia l'identità.