Algebra lineare e Geometria

Prova scritta del 15 settembre 2026

Testo e soluzioni dettagliate

Esercizio 1 Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e sia $L\colon V \to V$ l'endomorfismo che rispetto alla base $\mathcal{B}$ si rappresenta con la matrice A.

(1) Determinare dimensione e una base dei sottospazi nucleo e immagine di L.
(2) Stabilire se l'endomorfismo L risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire se esiste, ed in caso affermativo determinarla, una base di V costituita da autovettori di L.
(4) Stabillire se le matrici A^2 e B sono simili.

Soluzione

Scriviamo un vettore $v \in V$ nella forma

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3, \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Poiché A rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha

$$[L(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Nucleo e immagine

Per trovare il nucleo imponiamo $L(v) = 0$, cioè

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione segue $x_3 = 0$. Le prime due diventano $x_2 = x_1$ e $x_1 = x_2$, dunque esprimono la stessa condizione. Ponendo $x_1 = s$, otteniamo

$$[v]_{\mathcal{B}} = (s, s, 0)^t, \qquad v = s(v_1 + v_2).$$

Pertanto

$$\boxed{\ker L = \operatorname{span}\{v_1 + v_2\}, \qquad \dim \ker L = 1.}$$

Le colonne di A sono le coordinate delle immagini dei vettori della base:

$$L(v_1) = -v_1 + v_2, \qquad L(v_2) = v_1 - v_2, \qquad L(v_3) = v_1 + v_2 + 2v_3.$$

Ogni immagine $L(v)$ è una combinazione lineare di questi tre vettori. Il secondo è l'opposto del primo, quindi

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}\{-v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + 2v_3\}.$$

Per verificarne l'indipendenza, supponiamo

$$a(-v_1 + v_2) + b(v_1 + v_2 + 2v_3) = 0.$$

Raccogliendo i coefficienti rispetto alla base $\mathcal{B}$, segue

$$(-a + b)v_1 + (a + b)v_2 + 2bv_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -a + b = 0, \\ a + b = 0, \\ 2b = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione dà $b = 0$, e quindi $a = 0$. In conclusione,

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} L = 2, \qquad \{-v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + 2v_3\} \text{ è una base di } \operatorname{Im} L.}$$

Si verifica anche la relazione $\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = 1 + 2 = 3 = \dim V$.

2. Diagonalizzabilità

Calcoliamo il polinomio caratteristico usando la convenzione $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$. Sviluppando lungo l'ultima riga,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)\det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)\big((\lambda+1)^2-1\big) \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = -2, \qquad \lambda = 2.$$

Sono tre autovalori reali distinti. Autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti; scegliendo un autovettore per ciascuno dei tre autovalori si ottiene perciò una base di V. Dunque L **è diagonalizzabile su** $\mathbb{R}$.

3. Una base di autovettori

Determiniamo esplicitamente i tre autospazi.

Autovalore 0**.** Il relativo autospazio coincide con il nucleo:

$$E_0 = \ker L = \operatorname{span}\{v_1 + v_2\}.$$

Autovalore -2**.** Risolviamo $(A + 2I_3)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Si ha $x_3 = 0$ e $x_2 = -x_1$, quindi

$$E_{-2} = \operatorname{span}\{v_1 - v_2\}.$$

Autovalore 2**.** Risolviamo $(A - 2I_3)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo $-4x_1 + 4x_2 = 0$, cioè $x_2 = x_1$. Sostituendo nella prima segue $-2x_1 + x_3 = 0$, quindi $x_3 = 2x_1$. Pertanto

$$E_2 = \operatorname{span}\{v_1 + v_2 + 2v_3\}.$$

Una base ordinata di autovettori è dunque

$$\boxed{\mathcal{C} = (v_1 + v_2,\ v_1 - v_2,\ v_1 + v_2 + 2v_3).}$$

La matrice con queste coordinate come colonne è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det P = 2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Questo verifica direttamente che i tre vettori costituiscono una base. Le relazioni di autovettore danno $AP = PD$, dove

$$\boxed{D = [L]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = D.}$$

4. Confronto tra A^2 **e** B

Poiché $P^{-1}AP = D$, vale

$$P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = D^2 = \operatorname{diag}(0, 4, 4).$$

Quindi A^2 è diagonalizzabile e il suo autospazio relativo a 4 ha dimensione 2. Lo verifichiamo anche calcolando

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Infatti

$$(A^2 - 4I_3)X = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

ossia $x_3 = x_1 + x_2$. Ci sono due parametri liberi, dunque

$$\dim \ker(A^2 - 4I_3) = 2.$$

La matrice B è triangolare superiore, perciò

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 4)\lambda(\lambda - 4) = \lambda(\lambda - 4)^2.$$

Ha lo stesso polinomio caratteristico di A^2, ma questo non basta per concludere che le due matrici siano simili. Calcoliamo l'autospazio di B relativo all'autovalore 4:

$$B - 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue

$$(B - 4I_3)X = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ -4x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad \iff \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Pertanto

$$\ker(B - 4I_3) = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^t\}, \qquad \dim \ker(B - 4I_3) = 1.$$

In particolare, B non è diagonalizzabile: l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

Se esistesse una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}A^2S$, avremmo

$$B - 4I_3 = S^{-1}(A^2 - 4I_3)S.$$

La moltiplicazione per S darebbe allora un isomorfismo tra $\ker(B-4I_3)$ e $\ker(A^2-4I_3)$, che dovrebbero avere la stessa dimensione. Poiché le dimensioni sono rispettivamente 1 e 2, concludiamo che

$$\boxed{A^2 \text{ e } B \text{ non sono simili.}}$$

Esercizio 2 Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la forma bilineare simmetrica $\varphi_k \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_k(X,Y) = {}^tXA_kY, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, per quali valori la forma φ_k è degenere e determinarne la segnatura.
(2) Stabilire per quali valori di k la forma φ_k è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.
(3) Posto $k = 0$, si consideri il sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Determinare una base di U ortogonale rispetto a φ_0.
(4) Determinare dimensione e una base del sottospazio $U^{\perp,\varphi_0}$ e stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp,\varphi_0}$.

Soluzione

1. Degenerazione e segnatura

La matrice A_k è diagonale a blocchi:

$$A_k = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D_k \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D_k = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante è il prodotto dei determinanti dei blocchi:

$$\det C = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2, \qquad \det D_k = 2 \cdot 2 - k^2 = 4 - k^2.$$

Pertanto

$$\det A_k = 2(4 - k^2) = 2(2-k)(2+k).$$

Una forma bilineare è degenere se il suo radicale

$$\operatorname{rad}(\varphi_k) = \{X \in \mathbb{R}^4 : \varphi_k(X,Y) = 0 \text{ per ogni } Y \in \mathbb{R}^4\}$$

contiene un vettore non nullo. Poiché A_k è simmetrica, tale radicale è $\ker A_k$. La forma è dunque degenere esattamente quando la matrice non è invertibile:

$$\boxed{\varphi_k \text{ è degenere} \iff k = -2 \text{ oppure } k = 2.}$$

Per la segnatura consideriamo la forma quadratica associata. Per $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ si ha

$$\begin{aligned} q_k(X) = \varphi_k(X,X) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2kx_3x_4 + 2x_4^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 + \frac{2+k}{2}(x_3 + x_4)^2 + \frac{2-k}{2}(x_3 - x_4)^2. \end{aligned}$$

Infatti i coefficienti di x_3^2 e x_4^2 nell'ultima espressione sono entrambi

$$\frac{2+k}{2} + \frac{2-k}{2} = 2,$$

mentre il coefficiente di x_3x_4 è

$$(2+k) - (2-k) = 2k.$$

Il cambiamento di coordinate

$$y_1 = x_1 + x_2, \qquad y_2 = x_2, \qquad y_3 = x_3 + x_4, \qquad y_4 = x_3 - x_4$$

è invertibile, con inverso

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = \frac{y_3 + y_4}{2}, \quad x_4 = \frac{y_3 - y_4}{2}.$$

In queste coordinate,

$$q_k = y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{2+k}{2}y_3^2 + \frac{2-k}{2}y_4^2.$$

Per la legge d'inerzia di Sylvester possiamo quindi leggere la segnatura dai segni dei quattro coefficienti.

Indichiamo con (n_+, n_-, n_0) il numero di coefficienti positivi, negativi e nulli, rispettivamente. I primi due coefficienti sono sempre positivi. Per gli altri due:

- se $-2 < k < 2$, sia $2+k$ sia $2-k$ sono positivi;
- se $k = 2$, si ha $2+k = 4$ e $2-k = 0$;
- se $k = -2$, si ha $2+k = 0$ e $2-k = 4$;
- se $k > 2$, si ha $2+k > 0$ e $2-k < 0$;

- se $k < -2$, si ha $2 + k < 0$ e $2 - k > 0$.

In conclusione,

$$\boxed{(n_+, n_-, n_0) = \begin{cases} (4,0,0), & |k| < 2, \\ (3,0,1), & |k| = 2, \\ (3,1,0), & |k| > 2. \end{cases}}$$

Se si indica la segnatura con la sola coppia (n_+, n_-), le tre risposte sono rispettivamente $(4,0)$, $(3,0)$ e $(3,1)$. Il rango è 3 per $k = \pm 2$ e 4 per tutti gli altri valori.

Nei due casi degeneri possiamo anche descrivere il radicale. Le prime due equazioni di $A_k X = 0$ sono

$$x_1 + x_2 = 0, \qquad x_1 + 3x_2 = 0.$$

Sottraendole si ottiene $2x_2 = 0$, quindi $x_2 = x_1 = 0$. Per $k = 2$, le ultime due equazioni si riducono a $x_3 + x_4 = 0$; per $k = -2$, si riducono a $x_3 - x_4 = 0$. Dunque

$$\mathrm{rad}(\varphi_2) = \mathrm{span}\{(0,0,1,-1)^t\}, \qquad \mathrm{rad}(\varphi_{-2}) = \mathrm{span}\{(0,0,1,1)^t\}.$$

2. Quando la forma è un prodotto scalare

Una forma bilineare simmetrica è un prodotto scalare se è definita positiva, cioè se $\varphi_k(X, X) > 0$ per ogni $X \neq 0$. Dalla forma diagonale trovata sopra, questo accade esattamente quando tutti e quattro i coefficienti sono positivi. Poiché 1 e 2 sono già positivi, basta imporre

$$2 + k > 0, \qquad 2 - k > 0.$$

Le due disuguaglianze equivalgono a $k > -2$ e $k < 2$, quindi

$$\boxed{\varphi_k \text{ è un prodotto scalare} \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < k < 2.}$$

Per $k = \pm 2$ un vettore non nullo del radicale ha quadrato nullo, quindi manca la definita positività. Per $k > 2$,

$$q_k(0,0,1,-1) = 4 - 2k < 0;$$

per $k < -2$,

$$q_k(0,0,1,1) = 4 + 2k < 0.$$

Questo esclude esplicitamente tutti i valori rimanenti.

3. Una base di U ortogonale rispetto a φ_0

Per $k = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e quindi, per $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ e $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$,

$$\varphi_0(X, Y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_4y_4.$$

Le equazioni di U danno $x_3 = x_1 + x_2$ e $x_4 = -x_2$. Ponendo $x_1 = a$ e $x_2 = b$, otteniamo

$$X = (a, b, a + b, -b)^t = a(1, 0, 1, 0)^t + b(0, 1, 1, -1)^t.$$

Introduciamo dunque

$$u_1 = (1, 0, 1, 0)^t, \qquad u_2 = (0, 1, 1, -1)^t.$$

Sono indipendenti perché da $au_1 + bu_2 = 0$ le prime due coordinate danno $a = b = 0$. Pertanto (u_1, u_2) è una base di U e $\dim U = 2$.

Applichiamo Gram–Schmidt rispetto a φ_0. I prodotti necessari sono

$$\varphi_0(u_1, u_1) = 1 + 2 = 3, \qquad \varphi_0(u_1, u_2) = 1 + 2 = 3, \qquad \varphi_0(u_2, u_2) = 3 + 2 + 2 = 7.$$

Poniamo

$$w_1 = u_1, \qquad w_2 = u_2 - \frac{\varphi_0(u_2, w_1)}{\varphi_0(w_1, w_1)} w_1 = u_2 - \frac{3}{3} u_1 = u_2 - u_1.$$

Otteniamo

$$w_1 = (1, 0, 1, 0)^t, \qquad w_2 = (-1, 1, 0, -1)^t.$$

Per costruzione, e direttamente per bilinearità,

$$\varphi_0(w_1, w_2) = \varphi_0(u_1, u_2) - \varphi_0(u_1, u_1) = 3 - 3 = 0.$$

Inoltre,

$$\varphi_0(w_1, w_1) = 3, \qquad \varphi_0(w_2, w_2) = 7 - 2 \cdot 3 + 3 = 4.$$

I vettori sono non nulli e generano U, poiché $u_1 = w_1$ e $u_2 = w_1 + w_2$. La base richiesta è quindi

$$\boxed{\mathcal{B}_U = \big((1, 0, 1, 0)^t,\ (-1, 1, 0, -1)^t\big).}$$

Non è richiesta la normalizzazione: dividendo w_1 per $\sqrt{3}$ e w_2 per 2 si otterrebbe anche una base ortonormale.

4. Complemento ortogonale e somma diretta

Un vettore $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^t$ appartiene a $U^{\perp,\varphi_0}$ se e solo se è ortogonale a ogni vettore di U. Poiché (u_1, u_2) è una base e φ_0 è bilineare, è sufficiente e necessario imporre

$$\varphi_0(Z, u_1) = 0, \qquad \varphi_0(Z, u_2) = 0.$$

Usando l'espressione di φ_0, queste condizioni diventano

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_3 = 0, \\ z_1 + 3z_2 + 2z_3 - 2z_4 = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda otteniamo $2z_2 - 2z_4 = 0$, cioè $z_2 = z_4$. La prima equazione dà quindi $z_1 = -z_4 - 2z_3$. Ponendo $z_3 = a$ e $z_4 = b$, segue

$$Z = (-2a - b, b, a, b)^t = a(-2, 0, 1, 0)^t + b(-1, 1, 0, 1)^t.$$

I due vettori ottenuti sono indipendenti: la terza e la quarta coordinata di una loro combinazione nulla impongono, rispettivamente, $a = 0$ e $b = 0$. Pertanto

$$\boxed{U^{\perp,\varphi_0} = \operatorname{span}\{(-2, 0, 1, 0)^t,\ (-1, 1, 0, 1)^t\}, \qquad \dim U^{\perp,\varphi_0} = 2.}$$

Resta da verificare la somma diretta. Sia $Z \in U \cap U^{\perp,\varphi_0}$. Poiché $Z \in U$ e Z è ortogonale a tutti i vettori di U, è in particolare ortogonale a sé stesso. Quindi

$$0 = \varphi_0(Z, Z) = (z_1 + z_2)^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2 + 2z_4^2.$$

Tutti gli addendi sono non negativi, dunque devono essere tutti nulli:

$$z_2 = z_3 = z_4 = 0, \qquad z_1 + z_2 = 0.$$

Segue anche $z_1 = 0$, perciò $U \cap U^{\perp,\varphi_0} = \{0\}$. La formula delle dimensioni dà

$$\dim(U + U^{\perp,\varphi_0}) = \dim U + \dim U^{\perp,\varphi_0} - \dim(U \cap U^{\perp,\varphi_0}) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4, la somma coincide con $\mathbb{R}^4$. In conclusione,

$$\boxed{\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp,\varphi_0}.}$$

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro e consideriamo i punti

$$A_t =_{\mathcal{R}} (t, 1/t, 1) \qquad B_t =_{\mathcal{R}} (2t, 1/2t, -1)\ .$$

(1) Determinare una forma cartesiana della retta r_t passante per A_t e B_t.
(2) Determinare la posizione reciproca delle rette r_1 e r_{-1}.
(3) Determinare forma cartesiana e parametrica del piano π_1 passante per l'origine O e perpendicolare a r_1.
(4) Dimostrare che le rette r_{-1} e r_1 hanno la stessa distanza dall'origine.

Soluzione

Precisazione sul testo. La coordinata $1/t$ impone $t \neq 0$, anche se nel testo è scritto $t \in \mathbb{R}$. Nello svolgimento interpretiamo la scrittura $1/2t$ come $1/(2t)$. I punti sono pertanto

$$A_t = \left(t, \frac{1}{t}, 1\right), \qquad B_t = \left(2t, \frac{1}{2t}, -1\right), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Queste precisazioni riguardano lo svolgimento; il testo assegnato è riportato sopra nella sua forma originale.

1. Forma cartesiana della retta r_t

Un vettore direttore della retta passante per A_t e B_t è

$$B_t - A_t = \left(2t - t, \frac{1}{2t} - \frac{1}{t}, -1 - 1\right) = \left(t, -\frac{1}{2t}, -2\right).$$

È non nullo, avendo terza coordinata -2. Una parametrizzazione della retta è quindi

$$r_t : \quad \begin{cases} x = t + \lambda t, \\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\lambda}{2t}, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per eliminare il parametro, dalla terza equazione ricaviamo $\lambda = (1 - z)/2$. Sostituendo nella prima,

$$x = t + t\frac{1 - z}{2} = \frac{2t + t - tz}{2} = \frac{3t - tz}{2},$$

da cui $2x + tz = 3t$. Sostituendo nella seconda,

$$y = \frac{1}{t} - \frac{1 - z}{4t} = \frac{4 - 1 + z}{4t} = \frac{3 + z}{4t},$$

da cui $4ty - z = 3$. Una forma cartesiana è dunque

$$\boxed{r_t : \quad \begin{cases} 2x + tz = 3t, \\ 4ty - z = 3, \end{cases} \qquad t \neq 0.}$$

I due piani hanno normali $(2, 0, t)$ e $(0, 4t, -1)$, che sono indipendenti: se una loro combinazione è nulla, la prima coordinata annulla il primo coefficiente e la seconda, poiché $t \neq 0$, annulla il secondo. Il sistema descrive quindi una retta. Inoltre, risolvendo rispetto a x e y e ponendo $\lambda = (1 - z)/2$, si ritrova la parametrizzazione iniziale, quindi non sono stati aggiunti altri punti.

2. Posizione reciproca di r_1 e r_{-1}

Specializziamo la forma cartesiana:

$$r_1: \quad \begin{cases} 2x + z = 3, \\ 4y - z = 3, \end{cases} \qquad r_{-1}: \quad \begin{cases} 2x - z = -3, \\ 4y + z = -3. \end{cases}$$

Per la seconda retta abbiamo moltiplicato per -1 l'equazione $-4y - z = 3$.

Possiamo scegliere come vettori direttori

$$d_+ = (2, -1, -4) \quad \text{per } r_1, \qquad d_- = (2, -1, 4) \quad \text{per } r_{-1}.$$

Il primo si ottiene moltiplicando $B_1 - A_1$ per 2; il secondo moltiplicando $B_{-1} - A_{-1}$ per -2. Non sono proporzionali: se $d_- = c\, d_+$, dalla prima coordinata segue $c = 1$, mentre dalla terza seguirebbe $4 = -4$, impossibile. Le rette dunque non sono parallele.

Cerchiamo ora un eventuale punto comune, imponendo tutte le equazioni:

$$\begin{cases} 2x + z = 3, \\ 4y - z = 3, \\ 2x - z = -3, \\ 4y + z = -3. \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza otteniamo $4x = 0$, quindi $x = 0$. La prima dà allora $z = 3$. La seconda impone $4y - 3 = 3$, cioè $y = 3/2$; la quarta impone invece $4y + 3 = -3$, cioè $y = -3/2$. Il sistema è incompatibile: le rette non si intersecano.

Due rette nello spazio che non sono parallele e non si intersecano sono sghembe. Pertanto

$$\boxed{r_1 \text{ e } r_{-1} \text{ sono sghembe.}}$$

3. Il piano π_1

Un piano perpendicolare a r_1 ha come vettore normale un vettore direttore di r_1, ad esempio $d_+ = (2, -1, -4)$. Un piano con questa normale ha equazione

$$2x - y - 4z = c.$$

Il passaggio per $O = (0, 0, 0)$ impone $c = 0$. Quindi

$$\boxed{\pi_1: \quad 2x - y - 4z = 0.}$$

Per ottenere una forma parametrica, risolviamo l'equazione come $y = 2x - 4z$ e scegliamo liberamente $x = a$, $z = b$:

$$\boxed{\pi_1: \quad \begin{cases} x = a, \\ y = 2a - 4b, \\ z = b, \end{cases} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$$

Equivalentemente,

$$(x, y, z) = a(1, 2, 0) + b(0, -4, 1).$$

I due vettori direttori del piano sono indipendenti (le coordinate prima e terza annullano i rispettivi coefficienti in una combinazione nulla). Sono entrambi ortogonali alla normale:

$$(2, -1, -4) \cdot (1, 2, 0) = 2 - 2 = 0, \qquad (2, -1, -4) \cdot (0, -4, 1) = 4 - 4 = 0.$$

4. Distanza delle due rette dall'origine

Poiché il riferimento è ortonormale, la distanza dall'origine di un punto $P = (x, y, z)$ è $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Per trovare la distanza di una retta da O minimizziamo quindi la somma dei quadrati delle coordinate dei suoi punti.

Per r_1 usiamo il punto $A_1 = (1, 1, 1)$ e il direttore $d_+ = (2, -1, -4)$:

$$P_+(s) = A_1 + s\, d_+ = (1 + 2s,\ 1 - s,\ 1 - 4s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Il quadrato della distanza è

$$\begin{aligned}
\|P_+(s)\|^2 &= (1 + 2s)^2 + (1 - s)^2 + (1 - 4s)^2 \\
&= (1 + 4s + 4s^2) + (1 - 2s + s^2) + (1 - 8s + 16s^2) \\
&= 21s^2 - 6s + 3 \\
&= 21\left(s^2 - \frac{2}{7}s\right) + 3 \\
&= 21\left[\left(s - \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{49}\right] + 3 \\
&= 21\left(s - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{18}{7}.
\end{aligned}$$

Il termine quadratico è non negativo e si annulla per $s = 1/7$. Il minimo è quindi $18/7$ e viene raggiunto nel punto

$$H_+ = P_+\left(\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Pertanto

$$d(O, r_1)^2 = \frac{18}{7}.$$

Per r_{-1} usiamo il punto $A_{-1} = (-1, -1, 1)$ e il direttore $d_- = (2, -1, 4)$:

$$P_-(u) = A_{-1} + u\, d_- = (-1 + 2u,\ -1 - u,\ 1 + 4u), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\|P_-(u)\|^2 &= (-1 + 2u)^2 + (-1 - u)^2 + (1 + 4u)^2 \\
&= (1 - 4u + 4u^2) + (1 + 2u + u^2) + (1 + 8u + 16u^2) \\
&= 21u^2 + 6u + 3 \\
&= 21\left(u^2 + \frac{2}{7}u\right) + 3 \\
&= 21\left[\left(u + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{49}\right] + 3 \\
&= 21\left(u + \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{18}{7}.
\end{aligned}$$

Il minimo è ancora $18/7$, raggiunto per $u = -1/7$ nel punto

$$H_- = P_-\left(-\frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Si conclude che

$$\boxed{d(O, r_1) = d(O, r_{-1}) = \sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.}$$

Interpretazione geometrica. L'uguaglianza delle distanze si può dimostrare anche senza calcolarne il valore. Consideriamo la trasformazione

$$S(x, y, z) = (-x, -y, z).$$

Si tratta della rotazione di angolo π attorno all'asse z. Essa fissa l'origine e conserva le distanze perché, per ogni vettore (x, y, z),

$$\|S(x, y, z)\|^2 = (-x)^2 + (-y)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Inoltre,

$$S(A_1) = (-1, -1, 1) = A_{-1}, \qquad S(B_1) = \left(-2, -\frac{1}{2}, -1\right) = B_{-1}.$$

Essendo lineare,

$$S\big(A_1 + \lambda(B_1 - A_1)\big) = A_{-1} + \lambda(B_{-1} - A_{-1}),$$

quindi manda biunivocamente r_1 in r_{-1}. A ogni punto della prima retta corrisponde perciò un punto della seconda alla stessa distanza dall'origine, e viceversa. Anche i minimi delle distanze coincidono.

Nota sulla notazione. Se la scrittura $1/2t$ fosse invece intesa come $t/2$, nel punto 1 si avrebbe $B_t = (2t, t/2, -1)$ e la seconda equazione cartesiana sarebbe

$$4ty - (2 - t^2)z = t^2 + 2,$$

mentre la prima resterebbe $2x + tz = 3t$. Infatti $y = 1/t + \lambda(t/2 - 1/t)$ e $\lambda = (1 - z)/2$ danno $4ty = 4 + (t^2 - 2)(1 - z) = t^2 + 2 + (2 - t^2)z$. Per $t = \pm 1$ le due interpretazioni coincidono, quindi le risposte ai punti 2, 3 e 4 sono le stesse.

Quesito teorico

(1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e sia $L\colon V \to V$ un endomorfismo di V.
   (a) Si dia la definizione di autovalore di L.
   (b) Sia α un autovalore di L, si definisca l'autospazio assciato all'autovalore α e si verifichi che è un sottospazio di V.

(2) Si trovi un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ con un autospazio di dimensione 3 che non sia diagonalizzabile.

(3) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$.
   (a) Si dia la definizione di prodotto scalare ϕ su V.
   (b) Fissata una base $\mathcal{B}$ di V si definisca la matrice associata al prodotto scalare ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si ricavi l'espressione matriciale di ϕ.

Soluzione

1. Autovalori e autospazi

(a) Definizione di autovalore. Un numero reale α è un autovalore di L se esiste un vettore $v \in V$, con $v \neq 0$, tale che

$$L(v) = \alpha v.$$

Un tale vettore non nullo si chiama *autovettore associato ad* α. La condizione $v \neq 0$ è essenziale: il vettore nullo soddisfa $L(0) = \alpha 0$ per ogni α e non è un autovettore.

(b) Definizione di autospazio e verifica. L'autospazio associato ad α è

$$E_\alpha = \{v \in V : L(v) = \alpha v\}.$$

Esso contiene tutti gli autovettori relativi ad α e il vettore nullo. Per verificare che è un sottospazio osserviamo anzitutto che

$$L(0) = 0 = \alpha 0,$$

quindi $0 \in E_\alpha$. Se $u, v \in E_\alpha$ e $a, b \in \mathbb{R}$, dalla linearità di L segue

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v) = a\alpha u + b\alpha v = \alpha(au + bv).$$

Pertanto $au+bv \in E_\alpha$, e l'insieme è chiuso rispetto alle combinazioni lineari. Queste proprietà dimostrano che E_α è un sottospazio di V.

Equivalentemente,

$$L(v) = \alpha v \quad \Longleftrightarrow \quad (L - \alpha \,\mathrm{id}_V)(v) = 0,$$

perciò

$$\boxed{E_\alpha = \ker(L - \alpha \,\mathrm{id}_V).}$$

È dunque il nucleo di un'applicazione lineare. Poiché α è un autovalore, contiene almeno un vettore non nullo e $\dim E_\alpha \geq 1$.

2. Un endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ non diagonalizzabile

Definiamo $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ ponendo

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, x_3, 2x_4 + x_5, 2x_5).$$

Ogni coordinata è una combinazione lineare delle coordinate di partenza, quindi T è lineare. Nella base canonica la sua matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che l'autospazio relativo a 1 ha dimensione 3. L'equazione $T(X) = X$ equivale a

$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ 2x_4 + x_5 = x_4, \\ 2x_5 = x_5. \end{cases}$$

Le prime tre equazioni non impongono condizioni. L'ultima dà $x_5 = 0$ e la quarta dà allora $x_4 = 0$. Quindi

$$E_1(T) = \{(x_1, x_2, x_3, 0, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\},$$

dove e_i sono i vettori della base canonica. Dunque

$$\boxed{\dim E_1(T) = 3.}$$

Per verificare che T non è diagonalizzabile, calcoliamo il polinomio caratteristico. Essendo M triangolare superiore,

$$p_M(\lambda) = \det(\lambda I_5 - M) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2.$$

Gli unici autovalori sono 1 e 2, con molteplicità algebriche 3 e 2. Per l'autovalore 2, l'equazione $T(X) = 2X$ diventa

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1, \\ x_2 = 2x_2, \\ x_3 = 2x_3, \\ 2x_4 + x_5 = 2x_4, \\ 2x_5 = 2x_5. \end{cases}$$

Da essa si ricava $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$, mentre x_4 è libero. Quindi

$$E_2(T) = \operatorname{span}\{e_4\}, \qquad \dim E_2(T) = 1.$$

L'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 1, inferiore alla sua molteplicità algebrica 2. Equivalentemente, la somma delle dimensioni degli autospazi è

$$\dim E_1(T) + \dim E_2(T) = 3 + 1 = 4 < 5.$$

Non può quindi esistere una base di $\mathbb{R}^5$ costituita da autovettori:

$$\boxed{T \text{ non è diagonalizzabile.}}$$

L'endomorfismo costruito soddisfa entrambe le richieste.

3. Prodotto scalare e matrice associata

(a) Definizione. Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ che è bilineare, simmetrica e definita positiva. Precisamente:

(1) *Bilinearità*: per ogni $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\phi(au + bv, w) = a\phi(u, w) + b\phi(v, w),$$
$$\phi(u, av + bw) = a\phi(u, v) + b\phi(u, w).$$
(2) *Simmetria*: $\phi(u, v) = \phi(v, u)$ per ogni $u, v \in V$.
(3) *Definita positività*: $\phi(v, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$. Per bilinearità $\phi(0, 0) = 0$, quindi si può anche scrivere $\phi(v, v) \geq 0$ per ogni v, con uguaglianza se e solo se $v = 0$.

(b) Matrice associata ed espressione matriciale. Fissiamo una base ordinata $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ di V. La matrice di ϕ rispetto a $\mathcal{B}$, detta anche *matrice di Gram*, è la matrice $G = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ definita da

$$\boxed{g_{ij} = \phi(b_i, b_j).}$$

In forma esplicita,
$$G = \begin{pmatrix} \phi(b_1, b_1) & \phi(b_1, b_2) & \cdots & \phi(b_1, b_n) \\ \phi(b_2, b_1) & \phi(b_2, b_2) & \cdots & \phi(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(b_n, b_1) & \phi(b_n, b_2) & \cdots & \phi(b_n, b_n) \end{pmatrix}.$$

Siano ora
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j, \qquad X = [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Applichiamo prima la linearità nel primo argomento e poi quella nel secondo:
$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \ \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \, \phi\left(b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \, \phi(b_i, b_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, g_{ij} \, y_j. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la definizione di prodotto tra matrici, la coordinata i di GY è $\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j$; quindi
$$X^t G Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j \right).$$

Confrontando le due espressioni otteniamo la formula richiesta:

$$\boxed{\phi(u, v) = [u]_{\mathcal{B}}^t \, G \, [v]_{\mathcal{B}} = X^t G Y.}$$

Infine, la simmetria di ϕ implica $g_{ij} = \phi(b_i, b_j) = \phi(b_j, b_i) = g_{ji}$, dunque $G^t = G$. Inoltre, $X \neq 0$ è il vettore delle coordinate di un vettore $u \neq 0$, e pertanto
$$X^t G X = \phi(u, u) > 0.$$
La matrice associata a un prodotto scalare è quindi simmetrica e definita positiva, anche quando la base scelta non è ortonormale.