Algebra lineare e Geometria – Soluzioni della prova scritta del 16 giugno 2026

Esercizio 1

Testo. Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix},$$

dipendente dal parametro reale h.

(1) Determinare il rango di A_h al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

(2) Posto $h = 1$, si consideri l'endomorfismo

$$L\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice A_1. Determinare una base e una rappresentazione cartesiana dei sottospazi $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$.

(3) Determinare gli autovalori di L e, per ciascuno di essi, una base del relativo autospazio. Stabilire infine se L sia diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di L.

(4) Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$, determinarne le coordinate rispetto alla base di $\operatorname{Im} L$ scelta nel punto precedente e trovare una rappresentazione parametrica del sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{v})$.

Soluzione.

(1) Osserviamo che la matrice agisce separatamente sulle coppie di coordinate (x_1, x_3) e (x_2, x_4). Infatti, riordinando idealmente le coordinate come (x_1, x_3, x_2, x_4), la matrice diventa a blocchi diagonali con due blocchi uguali

$$B_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}.$$

Il determinante del blocco e'

$$\det B_h = h - 1.$$

Quindi:

$$\operatorname{rk} B_h = 2 \quad \text{se } h \neq 1, \qquad \operatorname{rk} B_1 = 1.$$

Poiche' A_h e' costituita da due blocchi uguali di questo tipo, si ottiene

$$\boxed{\operatorname{rk} A_h = 4 \text{ se } h \neq 1, \qquad \operatorname{rk} A_1 = 2.}$$

Si puo' anche verificare direttamente che

$$\det A_h = (h-1)^2,$$

e dunque, per $h \neq 1$, il rango e' 4. Per $h = 1$ la matrice e'

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha solo due righe indipendenti.

(2) Per $h = 1$, se $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, allora

$$L(X) = A_1 X = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $X \in \ker L$ se e solo se

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Da queste equazioni ricaviamo

$$x_1 = -x_3, \qquad x_2 = -x_4.$$

Ponendo $x_3 = s$ e $x_4 = t$, otteniamo

$$X = \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\boxed{\ker L = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

e una rappresentazione cartesiana e'

$$\boxed{\ker L : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}}$$

Per l'immagine consideriamo le colonne di A_1:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $C_3 = C_1$ e $C_4 = C_2$, e C_1, C_2 sono linearmente indipendenti. Ne segue che

$$\boxed{\operatorname{Im} L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.}$$

Un vettore generico dell'immagine ha la forma

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

Pertanto una rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$ e'

$$\boxed{\operatorname{Im} L : \begin{cases} y_1 - y_3 = 0, \\ y_2 - y_4 = 0. \end{cases}}$$

(3) Cerchiamo gli autovalori di L, cioe' gli scalari λ tali che

$$A_1 X = \lambda X.$$

Il polinomio caratteristico si ottiene osservando ancora la decomposizione in due blocchi uguali. Il blocco corrispondente e'

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico e'

$$\det(B_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Poiche' il blocco compare due volte, gli autovalori di A_1 sono

$$\boxed{\lambda = 0 \text{ e } \lambda = 2,}$$

entrambi con molteplicita' algebrica 2.

Per $\lambda = 0$, l'autospazio e' il nucleo di L, quindi

$$E_0 = \ker L = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $\lambda = 2$, risolviamo

$$A_1 X = 2X.$$

Scrivendo esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_1, \\ x_2 + x_4 = 2x_2, \\ x_1 + x_3 = 2x_3, \\ x_2 + x_4 = 2x_4. \end{cases}$$

Le prime e la terza equazione danno $x_3 = x_1$, mentre la seconda e la quarta danno $x_4 = x_2$. Quindi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si ha

$$\dim E_0 = 2, \qquad \dim E_2 = 2,$$

e quindi la somma delle dimensioni degli autospazi e' 4. Pertanto L e' diagonalizzabile. Una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di L e'

$$\boxed{\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

Rispetto a questa base, la matrice di L e'

$$\operatorname{diag}(0, 0, 2, 2).$$

(4) Abbiamo scelto come base di $\operatorname{Im} L$ la base

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il vettore dato e'

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$ e le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ sono

$$\boxed{[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

Cerchiamo ora $L^{-1}(\mathbf{v})$, cioe' l'insieme delle soluzioni di

$$A_1 X = \mathbf{v}.$$

Se $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, il sistema e'

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = s$ e $x_4 = t$, otteniamo

$$x_1 = 2 - s, \qquad x_2 = -1 - t.$$

Quindi

$$L^{-1}(\mathbf{v}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - s \\ -1 - t \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{L^{-1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.}$$

Come previsto, si tratta del traslato di $\ker L$ passante per una soluzione particolare.

Esercizio 2

Testo. Si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(X,Y) = {}^tXAY, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che φ e' un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.
(2) Determinare una base ortogonale rispetto a φ del sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(3) Determinare dimensione ed una base del sottospazio $U^{\perp,\varphi}$.
(4) Completare la base trovata al punto (2) ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione.

(1) La matrice A e' simmetrica, quindi la forma φ e' bilineare e simmetrica. Rimane da verificare che sia definita positiva.

Per ogni $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ si ha

$$\varphi(X,X) = {}^tXAX = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Completiamo il quadrato nella parte contenente x_1, x_2:

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2)^2.$$

Infatti

$$\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2)^2 = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Dunque

$$\varphi(X,X) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Questa quantita' e' sempre maggiore o uguale a 0, e si annulla se e solo se

$$x_1 = 0, \qquad x_1 + 2x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 0.$$

Da queste equazioni segue $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Pertanto $\varphi(X,X) > 0$ per ogni $X \neq 0$ e φ e' un prodotto scalare.

In alternativa, si puo' osservare che i minori principali di testa di A sono

$$2, \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \qquad 3, \qquad 3,$$

tutti positivi; per il criterio di Sylvester, A e' definita positiva.

(2) Risolviamo anzitutto le equazioni di U:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x_4 = x_3$. Dalla prima otteniamo

$$x_3 = x_1 + x_2.$$

Quindi anche

$$x_4 = x_1 + x_2.$$

Ponendo $x_1 = a$ e $x_2 = b$, un vettore generico di U e'

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \\ a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base di U e' dunque

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questa base non e' ortogonale rispetto a φ. Applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt relativo a φ.

Poniamo

$$w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo

$$Aw_1 = Au_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\varphi(u_1, u_1) = {}^t u_1 A u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Inoltre

$$Au_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\varphi(u_2, u_1) = {}^t u_2 A u_1 = {}^t u_1 A u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Poniamo allora

$$w_2 = u_2 - \frac{\varphi(u_2, w_1)}{\varphi(w_1, w_1)} w_1 = u_2 - \frac{3}{4} u_1.$$

Esplicitamente

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Per evitare frazioni, moltiplichiamo per 4 e prendiamo

$$\widetilde{w}_2 = 4 w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La moltiplicazione per uno scalare non nullo non modifica l'ortogonalita'. Verifichiamo direttamente:

$$A\widetilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\varphi(w_1, \widetilde{w}_2) = {}^t w_1 A \widetilde{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0.$$

Quindi una base ortogonale di U rispetto a φ e'

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

(3) Un vettore $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ appartiene a $U^{\perp,\varphi}$ se e solo se e' ortogonale, rispetto a φ, a tutti i vettori di U. Basta imporre l'ortogonalita' rispetto a una base di U, per esempio u_1, u_2.

Abbiamo gia' calcolato

$$Au_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Au_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\varphi(X, u_1) = {}^tXAu_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

e

$$\varphi(X, u_2) = {}^tXAu_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4.$$

Il sistema che definisce $U^{\perp,\varphi}$ e'

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene

$$x_1 - x_2 = 0,$$

cioe'

$$x_2 = x_1.$$

Sostituendo nella prima equazione:

$$2x_1 + x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

quindi

$$3x_1 + x_3 + x_4 = 0.$$

Ponendo $x_1 = x_2 = a$ e $x_3 = b$, otteniamo

$$x_4 = -3a - b.$$

Pertanto

$$X = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ -3a - b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\boxed{U^{\perp,\varphi} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,}$$

e in particolare

$$\boxed{\dim U^{\perp,\varphi} = 2.}$$

(4) Dal momento che φ e' un prodotto scalare, vale

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp,\varphi}.$$

Infatti $\dim U = 2$, $\dim U^{\perp,\varphi} = 2$ e $U \cap U^{\perp,\varphi} = \{0\}$, perche' se un vettore $u \in U$ appartiene anche a $U^{\perp,\varphi}$ allora

$$\varphi(u, u) = 0,$$

e, essendo φ definita positiva, segue $u = 0$.

Possiamo quindi completare la base ortogonale di U trovata al punto (2) aggiungendo una base di $U^{\perp,\varphi}$. Otteniamo la base di $\mathbb{R}^4$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).}$$

I primi due vettori formano una base di U, mentre gli ultimi due formano una base di $U^{\perp,\varphi}$.

Esercizio 3

Testo. Nello spazio affine euclideo E^4, opportunamente riferito, siano dati i punti

$$A = (1, 2, 3, 0), \qquad B = (2, 3, 4, 0), \qquad C = (1, 1, 0, 1),$$

e sia π il sottospazio affine dato da $x_1 = x_2 + x_3 - 1 = 0$.

Sia poi σ il piano affine passante per A e B e perpendicolare a π.

(1) Determinare una forma parametrica per π e una forma cartesiana per σ.
(2) Dimostrare che π e σ sono incidenti e determinarne l'intersezione D.
(3) Determinare un punto $E \in \sigma$ tale che i segmenti ED ed EC siano ortogonali, con $d(E, D) = 1$.
(4) Mostrare che la retta passante per E e C e' parallela a π e ha distanza 1 da π.

Soluzione.

(1) Il sottospazio affine π e' dato dalle equazioni

$$x_1 = 0, \qquad x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Quindi

$$x_1 = 0, \qquad x_3 = 1 - x_2.$$

Ponendo

$$x_2 = s, \qquad x_4 = t,$$

otteniamo

$$\pi: \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, s, 1 - s, t), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{\pi = (0, 0, 1, 0) + s(0, 1, -1, 0) + t(0, 0, 0, 1), \qquad s, t \in \mathbb{R}.}$$

La giacitura di π e' dunque

$$\vec{\pi} = \langle (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle .$$

Cerchiamo ora σ. Il piano σ passa per A e B, quindi contiene la direzione

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1, 0).$$

Poiche' σ e' perpendicolare a π, la sua giacitura deve essere l'ortogonale della giacitura di π. Calcoliamo quindi $\vec{\pi}^\perp$.

Un vettore $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ appartiene a $\vec{\pi}^\perp$ se e solo se

$$v \cdot (0, 1, -1, 0) = 0, \qquad v \cdot (0, 0, 0, 1) = 0.$$

Quindi

$$v_2 - v_3 = 0, \qquad v_4 = 0.$$

Pertanto

$$\vec{\pi}^\perp = \{(v_1, v_2, v_2, 0) : v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle .$$

In effetti

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0) + (0, 1, 1, 0),$$

quindi la direzione $\overrightarrow{AB}$ e' contenuta in $\vec{\pi}^\perp$.

Il piano affine σ passante per $A = (1, 2, 3, 0)$ e con giacitura $\vec{\pi}^\perp$ e'

$$\sigma = A + \vec{\pi}^\perp.$$

Una forma parametrica e'

$$\sigma: \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 0) + \lambda(1, 0, 0, 0) + \mu(0, 1, 1, 0),$$

cioe'

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + \lambda, 2 + \mu, 3 + \mu, 0).$$

Da questa forma si vede che su σ valgono le equazioni

$$x_4 = 0, \qquad x_3 - x_2 = 1.$$

Pertanto una forma cartesiana per σ e'

$$\boxed{\sigma: \begin{cases} x_3 - x_2 = 1, \\ x_4 = 0. \end{cases}}$$

(2) Per trovare l'intersezione imponiamo simultaneamente le equazioni di π e quelle di σ:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 - 1 = 0, \\ x_3 - x_2 = 1, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Dalle due equazioni centrali abbiamo

$$x_2 + x_3 = 1, \qquad -x_2 + x_3 = 1.$$

Sottraendo la seconda dalla prima otteniamo

$$2x_2 = 0,$$

cioe'

$$x_2 = 0.$$

Quindi

$$x_3 = 1.$$

Inoltre $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$. Dunque

$$\pi \cap \sigma = \{D\}, \qquad \boxed{D = (0, 0, 1, 0).}$$

In particolare π e σ sono incidenti.

(3) Un punto generico di σ ha la forma

$$E = (a, b, b + 1, 0), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

poiche' su σ valgono $x_4 = 0$ e $x_3 = x_2 + 1$.

Abbiamo

$$D = (0, 0, 1, 0), \qquad C = (1, 1, 0, 1).$$

I vettori dei segmenti ED ed EC possono essere presi come

$$\overrightarrow{ED} = D - E = (-a, -b, -b, 0),$$

e

$$\overrightarrow{EC} = C - E = (1 - a, 1 - b, -b - 1, 1).$$

La condizione di ortogonalita' e'

$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} = 0.$$

Calcoliamo il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} &= (-a)(1 - a) + (-b)(1 - b) + (-b)(-b - 1) + 0 \cdot 1 \\ &= -a + a^2 - b + b^2 + b^2 + b \\ &= a^2 - a + 2b^2. \end{aligned}$$

Pertanto l'ortogonalita' equivale a

$$a^2 - a + 2b^2 = 0.$$

Inoltre la condizione $d(E, D) = 1$ equivale a

$$\|D - E\|^2 = 1.$$

Ora

$$\|D - E\|^2 = (-a)^2 + (-b)^2 + (-b)^2 + 0^2 = a^2 + 2b^2.$$

Dunque

$$a^2 + 2b^2 = 1.$$

Confrontando le due condizioni

$$a^2 - a + 2b^2 = 0, \qquad a^2 + 2b^2 = 1,$$

otteniamo, sottraendo la prima dalla seconda,

$$a = 1.$$

Sostituendo in $a^2 + 2b^2 = 1$:

$$1 + 2b^2 = 1,$$

quindi

$$b = 0.$$

Pertanto

$$\boxed{E = (1, 0, 1, 0).}$$

Verifichiamo:

$$\overrightarrow{ED} = D - E = (-1, 0, 0, 0), \qquad \overrightarrow{EC} = C - E = (0, 1, -1, 1).$$

Allora

$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \qquad \|\overrightarrow{ED}\| = 1.$$

(4) La retta passante per E e C ha direzione

$$\overrightarrow{EC} = C - E = (0, 1, -1, 1).$$

La giacitura di π e'

$$\vec{\pi} = \langle (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle .$$

Ma

$$(0, 1, -1, 1) = (0, 1, -1, 0) + (0, 0, 0, 1),$$

quindi

$$\overrightarrow{EC} \in \vec{\pi}.$$

Ne segue che la retta EC e' parallela a π.

Una forma parametrica della retta $r = EC$ e'

$$r: \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = E + \lambda \overrightarrow{EC} = (1, 0, 1, 0) + \lambda(0, 1, -1, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Poiche' r e' parallela a π, la distanza tra r e π e' uguale alla distanza di un qualunque punto di r da π. Usiamo il punto E.

Un punto generico di π e'

$$P = (0, s, 1 - s, t).$$

Allora

$$E - P = (1, -s, s, -t).$$

Quindi

$$\|E - P\|^2 = 1 + s^2 + s^2 + t^2 = 1 + 2s^2 + t^2.$$

Il minimo si ottiene per

$$s = 0, \qquad t = 0.$$

Il punto di π piu' vicino a E e' quindi

$$P = (0, 0, 1, 0) = D,$$

e la distanza minima e'

$$\sqrt{1} = 1.$$

Pertanto

$$\boxed{d(r, \pi) = 1.}$$

Quesito teorico

Testo.

(1) Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dare la definizione di immagine di L, cioe' $\operatorname{Im} L$.
   (b) Verificare che $\operatorname{Im} L$ e' un sottospazio di W.
   (c) Siano V e W di dimensione finita. Verificare che $\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rk}(A)$, dove A e' la matrice che rappresenta L, fissate una base in V ed una base in W.

(2) (a) Dare la definizione di matrici simili.
   (b) Verificare che due matrici simili hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicita' algebriche.
   (c) Fare un esempio di due matrici che hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicita' algebriche ma non sono simili.

Soluzione.

(1) (a) Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare. L'immagine di L e' il sottoinsieme di W costituito da tutti i vettori di W che sono immagini di vettori di V. In simboli:

$$\operatorname{Im} L = \{w \in W : \exists v \in V \text{ tale che } L(v) = w\}.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{Im} L = \{L(v) : v \in V\}.$$

(b) Verifichiamo che $\operatorname{Im} L$ e' un sottospazio vettoriale di W.
Anzitutto $\operatorname{Im} L$ e' non vuoto, perche'

$$L(0_V) = 0_W,$$

quindi $0_W \in \operatorname{Im} L$.
Siano ora $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} L$. Per definizione di immagine, esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che

$$w_1 = L(v_1), \qquad w_2 = L(v_2).$$

Allora, usando la linearita' di L,

$$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2).$$

Poiche' $v_1 + v_2 \in V$, segue che

$$w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} L.$$

Quindi $\operatorname{Im} L$ e' chiuso rispetto alla somma.
Sia ora $\lambda \in \mathbb{K}$ e sia $w \in \operatorname{Im} L$. Allora esiste $v \in V$ tale che

$$w = L(v).$$

Per linearita',

$$\lambda w = \lambda L(v) = L(\lambda v).$$

Poiche' $\lambda v \in V$, segue che

$$\lambda w \in \operatorname{Im} L.$$

Dunque $\operatorname{Im} L$ e' chiuso anche rispetto alla moltiplicazione per scalari. Pertanto $\operatorname{Im} L$ e' un sottospazio di W.

(c) Supponiamo ora che V e W siano di dimensione finita. Fissiamo una base

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$$

di V e una base

$$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$$

di W. Sia A la matrice associata a L rispetto a tali basi.
Per definizione di matrice associata, la j-esima colonna di A e' il vettore delle coordinate di $L(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$:

$$A_j = [L(v_j)]_{\mathcal{C}}.$$

Ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Allora, per linearita',

$$L(v) = x_1 L(v_1) + \cdots + x_n L(v_n).$$

Quindi l'immagine di L e' generata dai vettori

$$L(v_1), \dots, L(v_n) :$$

infatti

$$\operatorname{Im} L = \langle L(v_1), \dots, L(v_n) \rangle.$$

Passando alle coordinate nella base $\mathcal{C}$, questo significa che lo spazio delle coordinate dei vettori di $\operatorname{Im} L$ e' generato dalle colonne di A.
Pertanto

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim\langle L(v_1), \dots, L(v_n)\rangle = \dim\langle A_1, \dots, A_n\rangle,$$

dove $A_1, \dots, A_n$ sono le colonne di A. Ma la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A e', per definizione, il rango di A. Quindi

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rk}(A).}$$

(2) (a) Due matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$B = P^{-1}AP.$$

Equivalentemente, A e B rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a due basi diverse.

(b) Supponiamo che A e B siano simili. Allora esiste $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$B = P^{-1}AP.$$

Vogliamo mostrare che A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
Per ogni λ, abbiamo

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I.$$

Poiche'

$$\lambda I = P^{-1}(\lambda I)P,$$

segue che

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P = P^{-1}(A - \lambda I)P.$$

Quindi

$$\det(B - \lambda I) = \det\big(P^{-1}(A - \lambda I)P\big).$$

Usando la moltiplicativita' del determinante:

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P).$$

Poiche'

$$\det(P^{-1}) \det(P) = 1,$$

otteniamo

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

Dunque A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico. Gli autovalori, con le loro molteplicita' algebriche, sono esattamente le radici del polinomio caratteristico contate con molteplicita'. Pertanto due matrici simili hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicita' algebriche.

(c) Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entrambe hanno polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2.$$

Quindi entrambe hanno come unico autovalore 0, con molteplicita' algebrica 2.
Tuttavia non sono simili. Infatti, se fossero simili, avrebbero lo stesso rango, poiche' la moltiplicazione a sinistra e a destra per matrici invertibili non cambia il rango. Ma

$$\operatorname{rk}(A) = 0, \qquad \operatorname{rk}(B) = 1.$$

Quindi A e B non sono simili.
Equivalentemente, si puo' osservare che A e' diagonalizzabile, mentre B non lo e'. Infatti A ha autospazio di dimensione 2, mentre

$$\ker B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{K} \right\}$$

ha dimensione 1.