Algebra lineare e Geometria - Prova scritta del 20 aprile 2026

Nome e Cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k & 0 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

dipendente dal parametro reale k.

(1) Determinare il rango di A_k al variare del parametro reale k.
(2) Posto $k = 0$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice A_0. Determinare le equazioni cartesiane e una base per i sottospazi $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$.
(3) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, verificare che $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$, determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\operatorname{Im} L$ scelta nel punto precedente.
(4) Scrivere una rappresentazione parametrica per il sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{v})$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in funzione del parametro reale h.

(1) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_h e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di h la matrice A_h risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di h la forma bilineare $\phi_h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_h(X, Y) = {}^tXA_hY$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di ϕ_h.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica ϕ_h si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito si considerino i punti

$$A = (0,1,0,0) \qquad B = (2,0,0,0) \qquad C = (1,0,1,1) \qquad D = (2,0,0,1)\ .$$

(1) Determinare la dimensione e una rappresentazione cartesiana di σ, il più piccolo sottospazio affine che contiene B, C, D.
(2) Determinare la posizione reciproca di σ e della retta r che passa per A e per l'origine del sistema di riferimento.
(3) Trovare una rappresentazione parametrica della retta s passante per l'origine e ortogonale a r e a σ.
(4) Determinare $s \cap \sigma$ e calcolare la distanza tra r e σ.

Quesito teorico.

(1) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale del dominio.
(2) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a entrate reali.
   (a) Dare la definizione di autovalore di A.
   (b) Sapendo che $A^3 = 0$ e $A \neq 0$, dimostare che l'unico autovalore di A è 0 e concludere che A non è diagonalizzabile
(3) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.
   (a) Dire cosa significa che b è indefinita.
   (b) Fare un esempio di forma bilineare simmetrica indefinita e degenere.

Soluzione dell'Esercizio 1

(1) Utilizziamo la riduzione a scala:

$$\begin{pmatrix} k & 1-k & 0 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ k & 1-k & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & (k-1)^2 & -k & 1-k \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & k+1 \\ 0 & 0 & -k(1+(k-1)^2) & k^2(1-k) \end{pmatrix}$$

e vediamo che, se $k \neq 0$, ci sono tre pivot. Se invece $k = 0$ ce ne sono solo due.

Dunque $\operatorname{rk} A_k = 3$ se $k \neq 0$ e $\operatorname{rk} A_0 = 2$.

(2) Abbiamo che $\dim \ker L = 4 - \operatorname{rk} L = 4 - \operatorname{rk} A_0 = 2$, dunque servono $4 - 2 = 2$ equazioni per descrivere $\ker L$.

$$\ker L = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ A_0 x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ : \ \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ : \ \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e l'ultima è una forma cartesiana di $\ker L$. Ponendo $x_3 = t$ e $x_4 = s$ otteniamo

$$\ker L = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} \ : \ t, s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

e quest'ultima è una base di $\ker L$, essendo un insieme di $2 = \dim \ker L$ generatori.

D'altra parte $\dim \operatorname{Im} L = \operatorname{rk} A_0 = 2$ e sappiamo che una base dell'immagine è data dalle colonne di A_0 su cui sono comparsi pivot dopo la riduzione a scala (in questo caso, prima e seconda):

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Inoltre, $\operatorname{Im} L$ sarà descritta da $3 - 2 = 1$ equazione. Si può vedere ad occhio che entrambi i vettori soddisfano $x_1 - x_3 = 0$, che è dunque una forma cartesiana dell'immagine, oppure si può osservare che

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ : \ \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ : \ x_1 - x_3 = 0 \right\} .$$

(3) Dalla forma cartesiana dell'immagine appena trovata, visto che $1 - 1 = 0$, $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} L$; inoltre si vede immediatamente che

$$\mathbf{v} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Si ha

$$L^{-1}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ A_0 \mathbf{x} = \mathbf{v}\} = \overline{\mathbf{x}} + \ker A_0$$

dove $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ è una qualsiasi soluzione di $A_0 \mathbf{x} = \mathbf{v}$. Ad esempio

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque, utilizzando la base di $\ker L$ trovata in un punto precedente otteniamo la rappresentazione parametrica

$$L^{-1}(v) = \begin{cases} x_1 = 3 + t \\ x_2 = 1 + s \\ x_3 = -t \\ x_4 = -s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R} .$$

Soluzione dell'Esercizio 2

(1) e (2) Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_h(\lambda)$ di A_h:

$$p_h(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & h^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & h^2-1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} .$$

$$= (1-\lambda)\left(-(1-\lambda) + (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - (h^2-1))\right) = (1-\lambda)^2((1-\lambda)^2 - h^2) = (1-\lambda)^2(1-\lambda-h)(1-\lambda+h)$$

Dunque

- se $h = 0$, abbiamo l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 4, ma $A_0 \neq I$, quindi m.g.$(1) = \dim\ker(A_0 - I) < 4$ e dunque A_0 non è diagonalizzabile;
- se $h \neq 0$, gli autovalori $1+h$ e $1-h$ hanno molteplicità algebrica 1 e 1 ha molteplicità algebrica 2, inoltre

$$\text{m.g.}(1) = \dim\ker A_h - I = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & h^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e dunque A_h è diagonalizzabile se $h \neq 0$.

(3) La forma bilineare ϕ_h è simmetrica se e solo se A_h è simmetrica, il che accade se e solo se $h^2 - 1 = 1$, cioè $h^2 = 2$, cioè per $h = \pm\sqrt{2}$. Avendo trovato gli autovalori per ogni h, sappiamo che essi sono $1, 1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ e vediamo che ve ne sono 3 positivi e 1 negativo. Dunque la forma di Sylvester di $\phi_{\pm\sqrt{2}}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(4) Dal calcolo della molteplicità geometrica di 1 sappiamo che

$$\ker(A_h - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Sapendone la dimensione, concludiamo che i due generatori dati sono una base di $\ker(A_h - I)$ se $h = \pm\sqrt{2}$. Inoltre, dal Teorema Spettrale sappiamo che gli altri due autovettori dovranno essere ortogonali a questi e dunque della forma

$$\begin{pmatrix} t \\ s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo

$$A_{\pm\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t \\ s \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+s \\ 2t+s \\ -s-t \\ 0 \end{pmatrix}$$

e impostiamo i due sistemi

$$\begin{cases} t+s = (1 \pm \sqrt{2})t \\ 2t+s = (1 \pm \sqrt{2})s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm\sqrt{2}t \\ 2t = \pm\sqrt{2}s \end{cases}$$

che danno, con $t = 1$, le due soluzioni

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Rinormalizzando per le radici quadrate dei moduli degli autovalori, otteniamo una base che porta ϕ_h in forma di Sylvester:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Soluzione dell'Esercizio 3

(1) Vediamo che

$$\mathbf{v} = C - B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = D - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e dunque $\sigma = B + \mathrm{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ ha dimensione 2. Inoltre, è semplice trovare due equazioni omogenee soddisfatte da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ad esempio $x_2 = 0$ e $x_1 + x_3 = 0$; sono chiaramente due equazioni indipendenti e, imponendo il passaggio per B, troviamo la rappresentazione cartesiana

$$\sigma : \begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 2 \end{cases}$$

(2) La retta r ha rappresentazione parametrica $r = \{O + t\mathbf{u} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$, dove O è l'origine. Notiamo che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, infatti

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \, .$$

Dunque le giaciture di r e σ si intersecano solo nell'origine di $\mathbb{R}^4$ e quindi r e σ sono incidenti oppure sghembi. Sostituiamo le parametriche di r nelle cartesiane di σ per vedere se l'intersezione è non vuota:

$$\begin{cases} t & = 0 \\ 0 + 0 & = 2 \end{cases}$$

che è chiaramente impossibile, dunque $r \cap \sigma = \emptyset$ e i due sottospazi sono sghembi.

(3) La giaciutura di s deve essere un vettore $\mathbf{z}$ che sia ortogonale a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, dunque deve essere una soluzione non nulla di

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_1 & = x_3 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

ad esempio

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, .$$

Allora

$$s : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

(4) Sostituendo le parametriche di s in σ abbiamo

$$\begin{cases} 0 & = 0 \\ t + t & = 2 \end{cases}$$

da cui $t = 1$. Quindi $s \cap \sigma = (1, 0, 1, 0)$. Notiamo che, per costruzione s è ortogonale a r e a σ, e si ha $r \cap s = (0, 0, 0, 0)$ e $s \cap \sigma = (1, 0, 1, 0)$; quindi la distanza tra r e σ è la distanza tra $(0, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 1, 0)$, ovvero

$$d(r, \sigma) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \, .$$