Soluzioni della Prova scritta del 23 febbraio 2026- TEMA 1

Esercizio 1 Fissata in $\mathbb{R}^4$ la base canonica $\mathcal{B}_c = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, considerare il sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

(1) Determinare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Verificare che esiste un endomorfismo $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$kerL = W, \quad L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad L(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4;$$

stabilire se L è unico. Determinare una rapppresentazione cartesiana per il sottospazio ImL.
(3) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_c}(L)$ associata a L rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$.
(4) Determinare una rappresentazione parametrica per il sottospazio affine $L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$.

---

(1) Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, abbiamo che $W = KerA$. Poiché la matrice A ha rango 2, abbiamo che $\dim W = 4 - rg(A) = 2$. Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = -\beta \\ x_4 = 2\alpha + \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

da cui ricaviamo che i vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono generatori di W e, poiché $\dim W = 2$, costituiscono una base di W. Per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ completando la base ottenuta di W, basta aggiungere ai vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v_2}$ tali che $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}\}$ siano linearmente indipendenti. Cerchiamo per semplicità tra i vettori della base canonica. Osserviamo che $\mathbf{e}_1 \notin W$, infatti non soddisfa le equazioni di W, quindi i vettori $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_1\}$ sono linearmente indipendenti. Verifichiamo se i vettori $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\}$ sono linearmente indipendenti: poiché risulta

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

possiamo concludere che i vettori sono una base di $\mathbb{R}^4$.
(2) Poiché nel punto precedente abbiamo verificato che i vettori $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$, allora esiste una ed una sola applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$L(\mathbf{w}_1) = \mathbf{0} \quad L(\mathbf{w}_2) = \mathbf{0} \quad L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad L(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4.$$

Tale applicazione verifica le condizioni richieste: infatti abbiamo che il sottospazio ImL coincide con $span(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4)$, poiché i vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$ sono linearmente indipendenti, si ha che $dimImL = 2$. Per il Teorema di nullità +rango, $kerL$ ha dimensione 2 e poiché contiene i vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ coincide con W. Abbiamo la rappresentazione parametrica di ImL:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Eliminando i parametri, possiamo ricavare una rappresentazione cartesiana per il sottospazio ImL:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(3) Poniamo $A = M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_c}(L)$. Sappiamo che $A^i = [L(\mathbf{e}_i]_{\mathcal{B}_c}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dalle condizioni:

$$L(\mathbf{w}_1) = L(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$$
$$L(\mathbf{w}_2) = L(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$$
$$L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
$$L(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4,$$

ricaviamo che:

$$L(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4 \quad L(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_4.$$

La matrice associata a L rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Poniamo $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora abbiamo che

$$L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \{X \in \mathbb{R}^4 | AX = B\}.$$

Osserviamo che tale insieme non è vuoto: poiché $L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ allora si ha che $\mathbf{e}_1 \in L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Pertanto $L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ è il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ con giacitura $KerA$ contenente $\mathbf{e_1}$:

$$L^{-1}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + W.$$

Una rappresentazione parametrica è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \alpha \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = -\beta \\ x_4 = 2\alpha + \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e siano

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Definiamo la funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ come

$$T(X) = \langle X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2X\,.$$

(1) Dimostrare che T è lineare e simmetrica e trovarne la matrice associata A rispetto alla base canonica.
(2) Trovare la dimensione e una base di $W = (\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})^\perp$ e mostrare che i suoi vettori non nulli sono autovettori di T.
(3) Trovare una base ortonormale di autovettori di T.
(4) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica $b(X, Y) = \langle X, (A + kI)Y \rangle$ è definita positiva su $\mathbb{R}^3$.

---

(1) Verifichiamo che T è un' applicazione lineare. Siano $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ abbiamo:

$$T(X_1 + X_2) = \langle X_1 + X_2, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X_1 + X_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2(X_1 + X_2) =$$

per la linearitá del prodotto scalare e le proprietá degli spazi vettoriali abbiamo:

$$= \langle X_1, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2X_1 + \langle X_2, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2X_2 =$$
$$= T(X_1) + T(X_2).$$

Siano $X \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$T(\lambda X) = \langle \lambda X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle \lambda X, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2(\lambda X) =$$

per la linearitá del prodotto scalare e le proprietá degli spazi vettoriali abbiamo:

$$\lambda \left(\langle X, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle X, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - 2X \right) = \lambda T(X).$$

Sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{B}_c$, abbiamo $A^i = [T(\mathbf{e}_i)]_{\mathcal{B}_c}$, per $i = 1, 2, 3$. Abbiamo per definizione:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$T(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{u} - 2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$T(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{v} - 2\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo pertanto $T(X) = AX$, per ogni vettore $X \in \mathbb{R}^3$. Osserviamo che la matrice A è simmetrica, verifichiamo che T è un endomorfismo simmetrico. Siano $X, Y \in \mathbb{R}^3$, abbiamo:

$$\langle T(X), Y\rangle = \langle AX, Y\rangle = {}^t(AX)Y = ({}^tX\,{}^tA)Y =$$

poiché $A = {}^tA$ e applicando la proprietá associativa del prodotto matriciale

$$= {}^tX(AY) = \langle X, AY\rangle = \langle X, T(Y)\rangle.$$

(2) I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti quindi il sottospazio $span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ha dimensione 2.Il suo complemento ortogonale W ha pertanto dimensione 1, poichè $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ è uno spazio euclideo. Sia $X \in \mathbb{R}^3$, allora X appartiene a W se e solo se si ha $\langle X, \mathbf{u}\rangle = \langle X, \mathbf{v}\rangle = 0$. Otteniamo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \implies x = y = z.$$

Possiamo concludere che $W = span(\mathbf{w})$, dove $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verifichiamo che $\mathbf{w}$ è un autovettore di T:

$$T(\mathbf{w}) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{w}.$$

Pertanto $\mathbf{w}$ è un autovettore di T associato all'autovalore -2, pertanto W è un sottospazio dell'autospazio di V_{-2}.
(3)Poichè la matrice A è reale simmetrica, A è diagonalizzabile. Sappiamo che la somma degli autovalori di A è la traccia di A e il prodotto degli autovalori di A è il determinante di A. Abbiamo che $tr(A) = -2$ e $det(A) = 2$. Indichiamo con α_1, α_2 e α_3 gli autovalori di A, dal punto precedente abbiamo che $\alpha_1 = -2$. Otteniamo pertanto:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2\alpha_3 = -1 \end{cases} \implies \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1.$$

La matrice ha 3 auotovalori distinti, gli autospazi corrispondenti hanno dimensione 1. Dal punto (2), possiamo dedurre che l'autospazio V_{-2} coincide con W. Procediamo per determinare gli altri autospazi di T. Abbiamo che:

- $V_1 = Ker(A - I_3)$ ed ha equazioni $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$, da cui ricaviamo che V_1 è il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $V_{-1} = Ker(A + I_3)$ ed ha equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, da cui ricaviamo che V_{-1} è il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T. Per ottenere una base ortonormale basta normalizzare i vettori, ponendo:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) Consideriamo la forma bilineare simmetrica $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $b(X, Y) = \langle X, (A + kI_3)Y\rangle = {}^tX(A + kI_3)Y$. Sia $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ la base che abbiamo trovato nel punto (3) e sia B la matrice associata alla forma blineare b rispetto alla base $\mathcal{B}$. Verifichiamo che B è diagonale. Infatti, per $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, si ha:

$$b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = \langle \mathbf{w}_i, (A + kI_3)\mathbf{w}_j\rangle = \langle \mathbf{w}_i, (\alpha_j + k)\mathbf{w}_j\rangle = (\alpha_j + k)\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle = 0$$

perchè i vettori $\mathbf{w}_i$ e $\mathbf{w}_j$ sono ortogonali. Risulta inoltre:

$$b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i) = \langle \mathbf{w}_i, (A + kI_3)\mathbf{w}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_i, (\alpha_i + k)\mathbf{w}_i \rangle = (\alpha_i + k)\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle = \alpha_i + k,$$

perchè $\mathbf{w}_i$ è un versore. Concludendo la matrice B è la seguente.

$$B = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$

La forma bilineare simmetrica b è definita positiva se. e solo se ha segnatura $(3, 0)$, cioè $k > 2$.

Esercizio 3 Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ opportunamente riferito, si considerino i punti di coordinate

$$A \equiv (1, 0, 1, 2)\,, \quad B \equiv (3, 1, 0, 2)\,, \quad C \equiv (2, 2, 1, 1)\,, \quad D \equiv (0, 1, 2, 3)$$

il sottospazio affine $S = A + \mathrm{span}(u, v)$, essendo $u := B - A$ e $v := C - A$, e la retta affine

$$r = D + \mathrm{span}(w)\,, \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) Si determini la dimensione di S e le sue equazioni cartesiane.
(2) Si studi la posizione reciproca di r e S.
(3) Si dice se esiste un iperpiano contenente sia r che S, scrivendone l'eventuale equazione cartesiana.
(4) Si calcoli la distanza tra il punto D e il sottospazio affine H di direzione generata da u, v, w e passante per l'origine del riferimento.

---

(1) Abbiamo $\mathbf{u} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = C - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti, pertanto $\dim S = 2$.
Una rappresentazione parametrica per S è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2\alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + 2\beta \\ x_3 = 1 - \alpha \\ x_4 = 2 - \beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ricavando i parametri α e β dall'equazione 3 e 4 e sostituendo nelle prime due equazioni otteniamo una rappresentazione cartesiana per S:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

(2) La retta affine r ed il piano affine S sono paralleli se e solo se risulta

$$span(\mathbf{w}) \subset span(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Poiché $span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è la giacitura di S, le sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

è immediato verificare che il vettore $\mathbf{w}$ non soddisfa tali equazioni. Possiamo concludere che la retta r ed il piano S non sono paralleli. Verifichiamo se la retta r ed il piano S sono incidenti. Scriviamo una rappresentazione parametrica per la retta r:

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 + t \\ x_4 = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Sia $P \in r$, allora $P \equiv (t, 1-t, 2+t, 3-t)$. Il punto P appartiene a S se e solo se verifica le equazioni cartesiane di S. Sostituendo le coordinate di P nelle equazioni di S otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2t = -2 \\ -2t = -4 \end{cases}$$

che non ha soluzioni. La retta r ed il piano S sono quindi sghembe. Infine, osserviamo che risulta:

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

da cui deduciamo che la retta r ed il piano S sono ortogonali.
(3) Per stabilire se esiste un iperpiano che contiene la retta r ed il piano S possiamo procedere in due modi.
Primo modo (sintetico): supponiamo per assurdo che esista un iperpiano T siffatto, allora possiamo fissare un sistema di riferimento ortonormale in T in modo tale che T possa essere identificato con lo spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3$. Ma sappiamo che nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3$ una retta ed un piano non paralleli si intersecano sempre! Possiamo concludere che l'iperpiano T non esiste.
Secondo modo (analitico): proviamo che non esiste alcun iperpiano $T \subset \mathbb{E}^4$ che contiene la retta r ed il piano S. T dovrebbe avere come giacitura il sottospazio $span(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Una rappresentazione parametrica per tale sottospazio è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + \beta\gamma \\ x_2 = \alpha + 2\beta - \gamma \\ x_3 = -\alpha + \gamma \\ x_4 = -\beta - \gamma \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Eliminando i parametri otteniamo l'equazione cartesiana del sottospazio $span(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0.$$

Quindi l'iperpiano che cerchiamo ha equazione

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = d$$

con $d \in \mathbb{R}$. Per avere l'inclusione $S \subset T$ basta imporre il passaggio per il punto A: $d = 10$. Per avere l'inclusione $r \subset T$ basta imporre il passaggio per il punto D: otteniamo $d = 16$. Possiamo concludere che non esiste un iperpiano che contiene r e S.
(4) Il sottospazio affine H passante per O e avente come giacitura il sottospazio $span(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ coincide con $span(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. H è quindi l'iperpiano di equazione:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0.$$

Calcoliamo la distanza tra il punto D e l'iperpiano H:

$$d(D, H) = \frac{|1 + 6 + 9|}{\sqrt{1 + 1 + 9 + 9}} = \frac{16}{\sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$