Algebra lineare e Geometria- Prova scritta del 3 febbraio 2026 - TEMA 1

Nome e Cognome: **Matricola:**

---

(1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3. Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V, si consideri, in dipendenza del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f_h \in \mathrm{End}(V)$ rappresentato sulla base $\mathcal{V}$ dalla matrice

$$A_h := M_{\mathcal{V}}(f_h) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ -1 & 1 & h \\ -1 & h & 1 \end{pmatrix}$$

(a) In dipendenza di h, si calcolino dimensioni e basi del nucleo $\ker(f_h)$ e dell'immagine $\mathrm{Im}(f_h)$.

Soluzione. Si ha

$$\det(A_h) = -h(h-1)(h+1).$$

- Se $h \notin \{0, \pm 1\}$ allora A_h è invertibile, dunque $\ker(f_h) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f_h) = V$ (dimensioni 0 e 3).
- Se $h = 0$ allora $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e

$$\ker(f_0) = \mathrm{Span}\{v_1 + v_2 + v_3\}, \qquad \mathrm{Im}(f_0) = \mathrm{Span}\{v_2, v_3\}.$$

- Se $h = 1$ allora $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, e

$$\ker(f_1) = \mathrm{Span}\{-v_2 + v_3\}, \qquad \mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Span}\{\, v_1 - v_2 - v_3,\ v_2 + v_3 \,\}.$$

- Se $h = -1$ allora $A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e

$$\ker(f_{-1}) = \mathrm{Span}\{v_2 + v_3\}, \qquad \mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathrm{Span}\{\, v_1 + v_2 + v_3,\ v_2 - v_3 \,\}.$$

□

(b) Si dica per quali valori di h si ha che f_h è un automorfismo di V.

Soluzione. f_h è un automorfismo se e solo se $\det(A_h) \neq 0$, cioè se e solo se $h \notin \{0, \pm 1\}$. □

(c) In dipendenza di h si dica quando A_h è diagonalizzabile.

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$P_{A_h}(\lambda) = \det(A_h - \lambda I) = (h - \lambda)(h - \lambda + 1)(h + \lambda - 1),$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = h + 1$, $\lambda_3 = 1 - h$.

- Se $h \neq 0, \frac{1}{2}$ sono distinti, dunque A_h è diagonalizzabile.
- Se $h = 0$ gli autovalori sono $0, 1, 1$ e si ha

$$V_0 = \ker(A_0) = \mathrm{Span}\{{}^t(1,1,1)\}, \qquad V_1 = \ker(A_0 - I) = \mathrm{Span}\{{}^t(0,1,0), {}^t(0,0,1)\},$$

perciò $\dim V_1 = 2$ e A_0 è diagonalizzabile.

- Se $h = \frac{1}{2}$ gli autovalori sono $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e $V_[1/2] = \mathrm{Span}\{{}^t(1,2,0), {}^t(1,0,2)\}$ e quindi $\dim V_{1/2} = 2$, dunque anche in questo caso A_h è diagonalizzabile.

Conclusione: A_h è diagonalizzabile per ogni $h \in \mathbb{R}$. □

(d) Per $h = 0$ si determini una matrice invertibile B tale che $B^{-1} \cdot A_0 \cdot B$ sia diagonale.

Soluzione. Per $h = 0$ una base di autovettori è data da

$$u_1 = (1,1,1) \ \ (\lambda = 0), \qquad u_2 = (0,1,0) \ \ (\lambda = 1), \qquad u_3 = (0,0,1) \ \ (\lambda = 1).$$

Ponendo $B = (u_1\ u_2\ u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha

$$B^{-1} A_0 B = \mathrm{diag}(0,1,1).$$

□

---

(2) Sia $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$; si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Mostrare che $e_1 + e_2 + e_3$ è autovettore di B e calcolarne il relativo autovalore.

Soluzione. Si ha

$$B(e_1+e_2+e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\,(e_1+e_2+e_3),$$

quindi $e_1 + e_2 + e_3$ è autovettore e l'autovalore è -1. □

(b) Trovare una base di autovettori di B e la corrispondente forma diagonale.

Soluzione. Gli autovalori di B sono distinti: -4, -1, 4. Un sistema di autovettori è

$$v_{-4} = {}^t(1,-2,1), \qquad v_{-1} = {}^t(1,1,1), \qquad v_4 = {}^t(-1,0,1).$$

Quindi $\{v_{-4}, v_{-1}, v_4\}$ è una base di autovettori e, rispetto ad essa, la forma diagonale è

$$D = \mathrm{diag}(-4,-1,4) \qquad \text{(a meno di permutazioni lungo la diagonale).}$$

□

(c) Definita la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ come $b(x,y) = x^t B y$, dimostrare che $U = \{v \in \mathbb{R}^3 \ : \ b(v, e_1+e_2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale e trovarne una base e la dimensione.

Soluzione. La mappa $\varphi(v) := b(v, e_1+e_2)$ è lineare in v, dunque

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 : \varphi(v) = 0\} = \ker(\varphi)$$

è un sottospazio. Ponendo $u = e_1 + e_2 = {}^t(1,1,0)$, si calcola

$$Bu = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b(v,u) = v^T B u = 2v_1 - 2v_2 - 2v_3$$

essendo $v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$. Quindi $b(v,u) = 0 \iff v_1 - v_2 - v_3 = 0$, e

$$U = \{(s+t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\{{}^t(1,1,0), {}^t(1,0,1)\}.$$

Dunque $\dim U = 2$ e una base è $\{e_1 + e_2,\ e_1 + e_3\}$. □

(d) Sia $W_t = \mathrm{Span}\{e_1+e_2+te_3, e_2-e_3\}$; al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la segnatura della restrizione di b a W_t.

Soluzione. Sia $w_1 = e_1 + e_2 + te_3 = {}^t(1,1,t)$ e $w_2 = e_2 - e_3 = {}^t(0,1,-1)$. Questi sono vettori linearmente indipendenti per ogni valore di t e quindi una base di W_t. La matrice della restrizione di b a W_t, rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ è

$$G = \begin{pmatrix} b(w_1,w_1) & b(w_1,w_2) \\ b(w_2,w_1) & b(w_2,w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(t-4) & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poiché $-4 < 0$, la segnatura dipende dal segno di $t(t-4)$:

- se $t < 0$ oppure $t > 4$, allora $t(t-4) > 0$ e la segnatura è $(1,1)$;
- se $0 < t < 4$, allora $t(t-4) < 0$ e la segnatura è $(0,2)$;
- se $t = 0$ oppure $t = 4$, allora $t(t-4) = 0$ e la segnatura è $(0,1)$.

□

---

(3) Fissato un riferimento affine ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, si considerino il punto $A \equiv_{\mathcal{R}} (2,-1,1,0)$, la retta affine r di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ ed il sottospazio affine S di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$

(a) Determinare la dimensione di S, una rappresentazione parametrica di S e una base per la giacitura si S.

Soluzione. Il sistema che definisce S è composto da 3 equazioni di cui solo 2 risultano linearmente indipendenti:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases} \implies (x_1,x_2,x_3,x_4) = (s+t+1,\ 1-s,\ s,\ t), \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\dim S = 2$. Una rappresentazione parametrica è

$$S = \big\{(1,1,0,0) + s\,{}^t(1,-1,1,0) + t\,{}^t(1,0,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\big\}.$$

La giacitura (spazio direttore) è il sottospazio vettoriale

$$\vec{S} = \mathrm{Span}\{{}^t(1,-1,1,0),\ {}^t(1,0,0,1)\}.$$

□

(b) Sia T il piú piccolo sottospazio affine contenente il punto A e la retta r. Determinare la dimensione di T, verificare che T e S sono incidenti e ortogonali.

Soluzione. La retta r è data da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases} \implies (x_1,x_2,x_3,x_4) = (2,0,2,0) + u\,{}^t(1,1,0,-1), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Sia $P_0 = (2,0,2,0) \in r$ e $d = {}^t(1,1,0,-1)$ il vettore direttore. Con $A = (2,-1,1,0)$, si ha $A - P_0 = {}^t(0,-1,-1,0)$, non multiplo di d, quindi il piú piccolo sottospazio affine contenente A e r é un piano affine:

$$T = P_0 + \mathrm{Span}\{d,\ A - P_0\}, \qquad \dim T = 2.$$

Intersezione: risolvendo le parametrizzazioni di S e T si ottiene un punto comune

$$P = \left(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right) \in S \cap T,$$

quindi S e T sono incidenti. Ortogonalità: ponendo

$$\vec{S} = \mathrm{Span}\{{}^t(1,-1,1,0),\ {}^t(1,0,0,1)\}, \qquad \vec{T} = \mathrm{Span}\{{}^t(1,1,0,-1),\ {}^t(0,-1,-1,0)\},$$

e sapendo che $S \cap T$ è costituito solo da un punto, basta verificare che tutti i prodotti scalari tra un generatore di $\vec{S}$ e uno di $\vec{T}$ sono nulli; dunque $\vec{S} = \vec{T}^{\perp}$ e $S \perp T$. □

(c) Stabilire se esiste un iperpiano H che contiene i sottospazi S e T.

Soluzione. Un iperpiano affine in $\mathbb{E}^4$ ha dimensione 3. Poiché S e T sono piani incidenti, l'insieme dei loro vettori direttori genera

$$\mathrm{Span}(\vec{S} \cup \vec{T}) = \mathbb{R}^4$$

(infatti i quattro vettori generatori di $\vec{S}$ e $\vec{T}$ sono linearmente indipendenti). Quindi il piú piccolo sottospazio affine che contiene S e T ha dimensione 4 (é tutto lo spazio) e non può essere contenuto in un iperpiano. Dunque *non* esiste un iperpiano che contenga sia S sia T. □

(d) Calcolare la distanza $d(A, r)$.

Soluzione. Scriviamo $r = P_0 + u\,d$ con $P_0 = (2,0,2,0)$ e $d = {}^t(1,1,0,-1)$. Allora

$$d(A,r) = \left\| (A - P_0) - \mathrm{proj}_{\langle d \rangle}(A - P_0) \right\|.$$

Con $A - P_0 = {}^t(0,-1,-1,0)$ si ha

$$\mathrm{proj}_{\langle d \rangle}(A - P_0) = \frac{(A - P_0) \cdot d}{d \cdot d}\, d = \frac{-1}{3}\, d,$$

quindi la componente ortogonale é

$$(A - P_0) + \frac{1}{3} d = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

e

$$d(A,r) = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

□

Quesito Teorico.

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$. Si dica se esiste un endomorfimo di V con un numero minore di n di autovalori distinti e, nel caso la risposta sia positiva, se ne dia un esempio.

Soluzione. Si, esiste: ad esempio l'identità Id_V ha un solo autovalore (pari a 1) e quindi certamente meno di n autovalori distinti. □

(2) Si dica, giustificando ogni affermazione, se:

(a) due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico;

Soluzione. Vero. Se A e B sono simili, $B = P^{-1}AP$, allora

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$$

per il Teorema di Binet. □

(b) due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

Soluzione. Falso. Ad esempio, in dimensione 2 le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2$, ma non sono simili (infatti $\mathrm{rank}(A) = 0$ mentre $\mathrm{rank}(B) = 1$). □

(3) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ di dimensione $n \geq 1$ e $L\colon V \to V$ un endomorfismo di V. Verificare che $\alpha \in \mathbb{K}$ è un autovalore di L se e solo se α è una radice del polinomio caratteristico di A, dove A è la matrice associata a L rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V.

Soluzione. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(L)$. Per definizione, α é autovalore di L se esiste $0 \neq v \in V$ tale che $L(v) = \alpha v$. Scrivendo $[v]_{\mathcal{B}} = x \neq 0$, questa relazione diventa

$$Ax = \alpha x \iff (A - \alpha I)x = 0,$$

cioè $\ker(A - \alpha I) \neq \{0\}$. Ciò accade se e solo se $\det(A - \alpha I) = 0$, ossia se e solo se α é radice del polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. □