Algebra lineare e Geometria
Soluzioni della prova scritta del 7 luglio 2026

Esercizio 1

Testo. Sia $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U_k = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix} \right\} \qquad W_k : \begin{cases} x_1 &= 0, \\ kx_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

(1) Determinare la dimensione di $U_k + W_k$ e $U_k \cap W_k$ in funzione di k.

(2) Per $k = -2$, trovare una forma cartesiana di $U_{-2} \cap W_{-2}$ e una base di $U_{-2} + W_{-2}$.

(3) Per $k = -1$, determinare una matrice A tale che l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da $T(X) = AX$ verifichi

$$\ker T = U_{-1}, \qquad \operatorname{Im} T = U_{-1}.$$

(4) Discutere la diagonalizzabilità di T.

Soluzione. Poniamo

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}.$$

I due vettori u_1, u_2 sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$, dunque

$$\dim U_k = 2.$$

Inoltre W_k è definito da due equazioni lineari indipendenti,

$$x_1 = 0, \qquad kx_3 + x_4 = 0,$$

quindi

$$\dim W_k = 2.$$

Un vettore generico di U_k è

$$au_1 + bu_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ (k+1)(a+b) \\ kb \end{pmatrix}.$$

Imponiamo che questo vettore appartenga a W_k. Dalla prima equazione di W_k otteniamo

$$a = 0.$$

Pertanto un vettore di $U_k \cap W_k$ è necessariamente della forma

$$b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}.$$

La seconda equazione di W_k impone

$$k(k+1)b + kb = 0,$$

ossia

$$k(k+2)b = 0.$$

Ne segue che

$$\dim(U_k \cap W_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \text{ oppure } k = -2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la formula di Grassmann,

$$\dim(U_k + W_k) = \dim U_k + \dim W_k - \dim(U_k \cap W_k),$$

quindi

$$\dim(U_k + W_k) = \begin{cases} 3, & \text{se } k = 0 \text{ oppure } k = -2, \\ 4, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Consideriamo ora il caso $k = -2$. Si ha

$$U_{-2} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

e, dal calcolo precedente,

$$U_{-2} \cap W_{-2} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una forma cartesiana della retta $U_{-2} \cap W_{-2}$ è dunque

$$U_{-2} \cap W_{-2} : \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Infatti le soluzioni di questo sistema sono precisamente

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$W_{-2} : \begin{cases} x_1 = 0, \\ -2x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

una base di W_{-2} è, per esempio,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Una base di $U_{-2} + W_{-2}$ è quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per $k = -1$ si ha

$$U_{-1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\{e_1, e_2 - e_4\}.$$

Vogliamo costruire un endomorfismo T tale che

$$\ker T = U_{-1}, \qquad \text{Im}\, T = U_{-1}.$$

Definiamo T sui vettori della base canonica nel modo seguente:

$$T(e_1) = 0, \qquad T(e_2) = e_1, \qquad T(e_3) = -e_1 + e_2 - e_4, \qquad T(e_4) = e_1.$$

La matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo il nucleo. Se $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, allora

$$AX = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_3 \\ 0 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Dunque $AX = 0$ se e solo se

$$x_3 = 0, \qquad x_2 + x_4 = 0.$$

Quindi

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = U_{-1}.$$

Inoltre le colonne di A appartengono tutte a U_{-1} e generano U_{-1}, poiché

$$T(e_2) = e_1, \qquad T(e_3) = -e_1 + (e_2 - e_4).$$

Pertanto

$$\operatorname{Im} A = U_{-1}.$$

Infine, poiché

$$\operatorname{Im} T = U_{-1} = \ker T,$$

si ha

$$T^2 = 0.$$

Quindi T è nilpotente. Poiché $T \neq 0$, l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Infatti l'unico autovalore possibile di un endomorfismo nilpotente è 0, e un endomorfismo nilpotente diagonalizzabile dovrebbe essere l'endomorfismo nullo. Equivalentemente,

$$\dim \ker T = 2 < 4,$$

quindi l'autospazio relativo all'unico autovalore 0 non ha dimensione sufficiente per diagonalizzare T.

Esercizio 2

Testo. Sia $h \in \mathbb{R}$ e si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\varphi_h \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_h(X, Y) = {}^t X A_h Y, \qquad A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Stabilire, al variare di $h \in \mathbb{R}$, se φ_h è degenere o non degenere e determinarne la segnatura.

(2) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a φ_h.

(3) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Posto $h = 1$, determinare dimensione e una base del sottospazio $U^\perp$, ortogonale a U rispetto a φ_1.

(4) Stabilire se i sottospazi U e $U^\perp$ sono in somma diretta e se si ha $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

Soluzione. La matrice A_h è a blocchi diagonali:

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

Il primo blocco

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha autovalori 3 e 1, entrambi positivi. Il secondo blocco

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori

$$1+h, \qquad 1-h.$$

Pertanto

$$\det A_h = 3(1-h^2).$$

La forma è dunque degenere se e solo se

$$h = \pm 1.$$

La segnatura, indicando con (p, q, r) il numero di direzioni positive, negative e nulle, è

$$\begin{cases} (4,0,0), & \text{se } -1 < h < 1, \\ (3,1,0), & \text{se } h < -1 \text{ oppure } h > 1, \\ (3,0,1), & \text{se } h = 1 \text{ oppure } h = -1. \end{cases}$$

Una base ortogonale rispetto a φ_h è

$$v_1 = e_1 + e_2, \qquad v_2 = e_1 - e_2, \qquad v_3 = e_3 + e_4, \qquad v_4 = e_3 - e_4.$$

Infatti questi vettori sono a due a due ortogonali rispetto a φ_h, e

$$\varphi_h(v_1, v_1) = 6, \qquad \varphi_h(v_2, v_2) = 2,$$
$$\varphi_h(v_3, v_3) = 2(1+h), \qquad \varphi_h(v_4, v_4) = 2(1-h).$$

Consideriamo ora il caso $h = 1$. Allora

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio U è dato dalle equazioni

$$x_1 = x_2, \qquad x_3 = -x_4,$$

quindi una base di U è

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un vettore $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartiene a $U^\perp$ se e solo se

$$\varphi_1(X, u_1) = 0, \qquad \varphi_1(X, u_2) = 0.$$

Ora

$$A_1 u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\varphi_1(X, u_1) = 3x_1 + 3x_2, \qquad \varphi_1(X, u_2) = 0.$$

Si ottiene quindi

$$U^\perp = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

Di conseguenza

$$\dim U^\perp = 3$$

e una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Studiamo ora l'intersezione. Un vettore di $U \cap U^\perp$ deve soddisfare

$$x_1 = x_2, \qquad x_3 + x_4 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Da $x_1 = x_2$ e $x_1 + x_2 = 0$ segue

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Rimane la condizione $x_3 + x_4 = 0$. Quindi

$$U \cap U^\perp = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In particolare

$$U \cap U^\perp \neq \{0\}.$$

Dunque U e $U^\perp$ non sono in somma diretta e non si ha

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp.$$

Osserviamo però che

$$\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp - \dim(U \cap U^\perp) = 2 + 3 - 1 = 4,$$

perciò si ha comunque

$$\mathbb{R}^4 = U + U^\perp,$$

ma la somma non è diretta.

Esercizio 3

Testo. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia π il sottospazio affine generato dai punti

$$A \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 1, 0), \qquad B \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 0, 0), \qquad C \equiv_{\mathcal{R}} (0, 0, 1, 1).$$

(1) Determinare la dimensione di π, una rappresentazione parametrica e cartesiana per π.

(2) Verificare che esiste un unico iperpiano H che contiene π e l'origine O. Determinare l'equazione cartesiana di H.

(3) Determinare una rappresentazione parametrica e cartesiana del piano affine α per O ortogonale a π.

(4) Determinare la distanza di O dal piano π.

Soluzione. Consideriamo i vettori direttori

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Essi sono linearmente indipendenti. Quindi π è un piano affine, cioè

$$\dim \pi = 2.$$

Una rappresentazione parametrica di π è

$$\pi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$x_1 = 1 - t, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1 - s, \qquad x_4 = t.$$

Eliminando i parametri si ottiene

$$\pi : \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + x_4 = 1. \end{cases}$$

L'iperpiano affine H richiesto deve contenere π e l'origine. Poiché π è contenuto nell'iperpiano lineare

$$x_2 = 0$$

e anche O soddisfa tale equazione, certamente

$$H : \ x_2 = 0$$

è un iperpiano contenente π e O. Inoltre i vettori posizione di A, B, C generano lo spazio

$$\mathrm{Span}\{A, B, C\} = \mathrm{Span}\{e_1, e_3, e_4\},$$

che ha dimensione 3. Esiste quindi un unico iperpiano lineare di $\mathbb{R}^4$ che contiene A, B, C e O, precisamente

$$H : \ x_2 = 0.$$

La giacitura di π è

$$L = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il piano affine α per O ortogonale a π ha giacitura $L^\perp$. Cerchiamo dunque i vettori

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

tali che

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad X \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si ottiene

$$-x_3 = 0, \qquad -x_1 + x_4 = 0.$$

Quindi

$$L^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \\ s \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pertanto

$$\alpha : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Una rappresentazione cartesiana di α è

$$\alpha : \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 - x_1 = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo infine la distanza di O da π. Poiché

$$\pi : \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + x_4 = 1, \end{cases}$$

e la variabile x_3 è libera, il punto di π più vicino a O si ottiene ponendo $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e minimizzando

$$x_1^2 + x_4^2$$

sotto il vincolo

$$x_1 + x_4 = 1.$$

Il minimo si ha per

$$x_1 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

Il punto più vicino è quindi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e la distanza cercata è

$$d(O, \pi) = \|P\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quesito teorico

Testo.

(1) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia ϕ un prodotto scalare su V.
   (a) Dare la definizione di prodotto scalare.
   (b) Dato U sottospazio vettoriale di V, definire $U^\perp$ e dimostrare che è un sottospazio vettoriale.
   (c) Dimostrare che $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(2) Siano U, V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.
   (a) Dire cosa significa che $T : U \to V$ è lineare.
   (b) Dimostrare che se $T : U \to V$ e $S : V \to W$ sono lineari, allora $S \circ T$ è lineare.
   (c) Trovare un esempio di applicazione lineare $T : U \to V$, che non sia l'identità, e di due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ di U, V tali che la matrice associata a T rispetto ad esse sia l'identità.

Soluzione.

Primo quesito. Un prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale V è un'applicazione

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}$$

tale che, per ogni $u, v, w \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valgano le seguenti proprietà:

(1) bilinearità:
$$\phi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \phi(u, w) + \mu \phi(v, w),$$
e analogamente nella seconda variabile;

(2) simmetria:
$$\phi(u, v) = \phi(v, u);$$

(3) definitezza positiva:
$$\phi(v, v) \geq 0 \quad \text{per ogni } v \in V,$$
e
$$\phi(v, v) = 0 \quad \iff \quad v = 0.$$

Se U è un sottospazio vettoriale di V, si definisce

$$U^\perp = \{v \in V : \phi(v,u) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}.$$

Dimostriamo che $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V. Anzitutto $0 \in U^\perp$, perché

$$\phi(0,u) = 0 \qquad \text{per ogni } u \in U.$$

Siano ora $v, w \in U^\perp$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Per ogni $u \in U$ si ha

$$\phi(\lambda v + \mu w, u) = \lambda\phi(v,u) + \mu\phi(w,u) = 0.$$

Quindi

$$\lambda v + \mu w \in U^\perp.$$

Pertanto $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Infine dimostriamo che

$$U \cap U^\perp = \{0\}.$$

Sia $v \in U \cap U^\perp$. Poiché $v \in U^\perp$, si ha

$$\phi(v,u) = 0 \qquad \text{per ogni } u \in U.$$

In particolare, siccome $v \in U$, possiamo scegliere $u = v$ e ottenere

$$\phi(v,v) = 0.$$

Per la definitezza positiva del prodotto scalare segue

$$v = 0.$$

Quindi

$$U \cap U^\perp = \{0\}.$$

Secondo quesito. Un'applicazione $T : U \to V$ si dice lineare se, per ogni $u_1, u_2 \in U$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si ha

$$T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2).$$

Equivalentemente, T preserva le combinazioni lineari.

Siano ora

$$T : U \to V, \qquad S : V \to W$$

due applicazioni lineari. Dimostriamo che

$$S \circ T : U \to W$$

è lineare. Per ogni $u_1, u_2 \in U$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, usando prima la linearità di T e poi quella di S, otteniamo

$$(S \circ T)(\lambda u_1 + \mu u_2) = S(T(\lambda u_1 + \mu u_2))$$
$$= S(\lambda T(u_1) + \mu T(u_2)) = \lambda S(T(u_1)) + \mu S(T(u_2)).$$

Dunque

$$(S \circ T)(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda (S \circ T)(u_1) + \mu (S \circ T)(u_2),$$

e quindi $S \circ T$ è lineare.

Costruiamo infine un esempio. Prendiamo

$$U = V = \mathbb{R}^2$$

e consideriamo l'applicazione lineare

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T(x,y) = (2x, 3y).$$

Questa applicazione non è l'identità. Consideriamo la base del dominio

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$$

e la base del codominio

$$\mathcal{C} = ((2,0), (0,3)).$$

Allora

$$T(e_1) = (2,0), \qquad T(e_2) = (0,3).$$

Dunque le coordinate di $T(e_1)$ e $T(e_2)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice associata a T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},$$

pur essendo $T \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.