Soluzioni della prova scritta del 12 febbraio 2025 - TEMA 1

Esercizio 1
Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti razionali e si consideri la funzione

$$\Delta : V \longrightarrow V \quad \text{definita ponendo} \quad \Delta\left(\sum_{n=0}^{d} a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } d = 0 \\ \sum_{n=1}^{d} n a_n x^{n-1} & \text{se } d \geq 1 \end{cases}$$

(1) Si dimostri che Δ è un endomorfismo di V e si dica se Δ è iniettivo o suriettivo.
(2) Posto V_4 il sottospazio di V dei polinomi di grado al più 4, si determini la matrice rappresentativa dell'endomorfismo $\Delta_4 := \Delta_{|V_4}$ di V_4 che è restrizione di Δ a V_4, relativamente ad un'opportuna base di V_4.
(3) Si esibiscano basi e dimensioni di $\ker \Delta_4$ e $\operatorname{Im} \Delta_4$. Δ_4 è iniettivo o suriettivo?
(4) Si determinino gli autovalori e autovettori di Δ_4 e si dica se è diagonalizzabile.

---

(1) Proviamo che Δ è un applicazione lineare. Siano $p(x), q(x) \in V$, $p(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$ e $q(x) = \sum_{n=0}^{d'} b_n x^n$ e supponiamo che $d \leq d'$. Se $d = 0$ allora la linearità è ovvia poiché

$$\Delta(p(x) + q(x)) = \Delta(a_0 + q(x)) = \Delta(q(x)) = 0 + \Delta(q(x)) = \Delta(p(x)) + \Delta(q(x))$$

Se invece $d > 0$ abbiamo:

$$\Delta\left(p(x) + q(x)\right) = \Delta\left(\sum_{n=0}^{d}(a_n + b_n)x^n + \sum_{n=d+1}^{d'} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{d} n(a_n + b_n)x^{n-1} + \sum_{n=d+1}^{d'} n b_n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{d} n a_n x^{n-1} + \left(\sum_{n=1}^{d} n b_n x^{n-1} + \sum_{n=d+1}^{d'} n b_n x^{n-1}\right) = \Delta\left(p(x)\right) + \Delta\left(q(x)\right).$$

Siano $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $p(x) \in V$, abbiamo:

$$\Delta\left(\lambda p(x)\right) = \Delta\left(\sum_{n=0}^{d} \lambda a_n x^n\right) = \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda\Delta(p(x)) & \text{se } d = 0 \\ \sum_{n=1}^{d} n(\lambda a_n)x^{n-1} = \lambda\left(\sum_{n=1}^{d} n a_n x^{n-1}\right) = \lambda\Delta\left(p(x)\right) & \text{se } d \geq 1 \end{cases}.$$

Dalla definizione si ha che se p è un polinomio di grado 0, cioè $p(x) = a_0$, allora $\Delta(p) = 0$. Quindi $ker(\Delta) \neq \{0\}$ e pertanto Δ non è iniettiva.
Osserviamo che per ogni $s \geq 1$ il monomio x^s appartiene al sottospazio $Im(\Delta)$: infatti si ha $\Delta(\frac{1}{s+1}x^{s+1}) = x^s$. Concludiamo che $Im(\Delta)$ contiene tutto lo spazio dei polinomio in x a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

(2) Ricordiamo che $\dim V_4 = 5$, possiamo considerare la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ di V_4. Abbiamo:

$$\Delta(1) = 0 \quad \Delta(x) = 1 \quad \Delta(x^2) = 2x \quad \Delta(x^3) = 3x^2 \quad \Delta(x^4) = 4x^3.$$

Pertanto la matrice associata a Δ_4 rispetto alla base fissata è la seguente:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Delta_4) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Poichè la matrice A ha rango 4, si ha che $\dim Im(\Delta_4) = 4$ e $\dim ker(\Delta_4) = 1$. Una base per il sottospazio $ker(\Delta_4)$ è data dal polinomio $p(x) = 1$, una base per il sottospazio $Im(\Delta_4)$ è la seguente: $(1, x, x^2, x^3)$. L'endomorfismo Δ_4 non è iniettivo poichè $ker(\Delta_4) \neq \{0\}$ e non è suriettivo poichè $Im(\Delta_4) \neq V$.

(4) Calcoliamo il polinomio caratteristico di Δ_4:

$$p_{\Delta_4}(t) = det(A - tI_5) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t^5.$$

L'unica radice è $t = 0$ con molteplicità 5. Ma l'autospazio $V_0 = ker(\Delta_4)$ ha dimensione 1, pertanto $m(0) \neq 5$ e possiamo concludere che Δ_4 non è diagonalizzabile.

Esercizio 2

Si consideri la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 1 & h^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, in funzione del parametro reale h.

(1) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_h e le loro molteplicità algebriche.
(2) Stabilire per quali valori di h la matrice A_h risulta diagonalizzabile.
(3) Stabilire per quali valori di h la forma bilineare $\phi_h \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ data da $\phi_h(X, Y) = {}^tXA_hY$ è simmetrica e per i valori trovati si scriva la forma canonica di Sylvester di ϕ_h.
(4) Per i valori trovati nel punto precedente, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la forma bilineare simmetrica ϕ_h si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

---

(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_h:

$$p_{A_h}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & h^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = [(1-t)^2 - 1][(1-t)^2 - h^2].$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono: $t = 0$, $t = 2$, $t = 1-h$, $t = 1+h$. Osserviamo che tali soluzioni sono distinte se e solo se si ha $h \neq 0, 1, -1$. Possiamo pertanto concludere che:
- se $h \neq 0, 1, -1$, la matrice ha autovalori $\{0, 2, 1-h, 1+h\}$, tutti di molteplicità algebrica 1;
- se $h = 1, -1$, la matrice ha autovalori $\{0, 2\}$ entrambi di molteplicità algebrica 2;
- se $h = 0$, la matrice ha autovalori $\{0, 1, 2\}$, con $\mu(0) = \mu(2) = 1$ e $\mu(1) = 2$.

(2) Se $h \neq 0, 1, -1$ la matrice A_h risulta diagonalizzabile perchè ha 4 autovalori distinti. Se $h = 1, -1$, la matrice A_h risulta reale simmetrica, pertanto per il corollario del teorema spettrale è diagonalizzabile . Sia

$h=0$, abbiamo $m(1)=\dim V_1 = 4-rk(A_0-I_4)=1$, infatti si ha:

$$A_0-I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \quad rk(A_0-I_4)=3.$$

Pertanto la matrice non è diagonalizzabile essendo $m(0)+m(2)+m(1)=3\neq 4$.

(3) La forma bilineare ϕ_h è simmetrica se e solo se la matrice $A_h = {}^tA_h$ se e solo se $h^2=1$, cioè $h=1$ o $h=-1$. Osserviamo che risulta

$$A_1=A_{-1}=A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

e dal punto (1) la matrice A ha autovalori $\{0,2\}$ entrambi con molteplicità algebrica 2. Pertanto per $h=1,-1$ la forma ϕ_h ha segnatura $(2,0,2)$ e la matrice di Sylvester è la seguente:

$$I_{2,0}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(4) Per trovare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\phi_1)=I_{2,0}$ possiamo cercare una base ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A_1, la cui esistenza è garantita dal teorema spettrale.
Consideriamo l'autospazio V_2:

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_3-x_4=0\end{cases} \qquad V_0=span(v_1,v_2), \quad v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

e l'autospazio V_0:

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3+x_4=0\end{cases} \qquad V_0=span(v_3,v_4), \quad v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

La base (v_1,v_2,v_3,v_4) è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$ ed è costituita da autovettori di A_1: pertanto è ortogonale rispetto a ϕ_1. Basta ora normalizzare i vettori v_1 e v_2. Abbiamo: $\phi_1(v_1,v_1)=\phi_1(v_2,v_2)=4$, pertanto basta porre:

$$u_1=\frac{1}{2}v_1 \quad u_2=\frac{1}{2}v_2 \quad u_3=v_3 \quad u_4=v_4$$

e otteniamo la base cercata.

Esercizio 3
Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$ fissiamo un riferimento ortonormale $\mathcal{R}$ e consideriamo i punti

$$A\equiv_{\mathcal{R}}(1,1,-1,2) \quad B\equiv_{\mathcal{R}}(1,0,0,1) \quad C\equiv_{\mathcal{R}}(0,1,0,2) \quad D\equiv_{\mathcal{R}}(2,0,-1,1) \quad P\equiv_{\mathcal{R}}(2,1,1,1).$$

(1) Determinare la dimensione e una forma parametrica e cartesiana del più piccolo sottospazio affine σ che contiene A, B, C, D.
(2) Trovare la forma parametrica di un piano affine π tale che $\pi\cap\sigma=\{A\}$ e $\pi\perp\sigma$.

(3) Sia ℓ la retta per P e B; verificare che ℓ è perpendicolare a σ e determinare la posizione reciproca di ℓ e π.
(4) Verificare che

$$(\mathrm{dist}(P,\sigma))^2 + (\mathrm{dist}(P,\pi))^2 = (\mathrm{dist}(P,A))^2 \ .$$

---

(1) Consideriamo i vettori $u_1 = B - A$, $u_2 = C - A$ e $u_3 = D - A$, le cui coordinate sono:

$$[u_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [u_2] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [u_3] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che σ è il sottospazio affine per A con giacitura il sottospazio $span(u_1, u_2, u_3)$. Osserviamo che $u_3 = u_1 - u_2$ e che i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti. Pertanto $\dim span(u_1, u_2, u_3) = 2$ e σ è un piano affine. Una rappresentazione parametrica per σ è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \beta \\ x_2 = 1 - \alpha \\ x_3 = -1 + \alpha + \beta \\ x_4 = 2 - \alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ricavando α e β dalle prime 2 equazioni e sostituendo nelle altre otteniamo una rappresentazione cartesiana per σ:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(2) Consideriamo il piano affine π per il punto A con giacitura $span(u_1, u_2)^\perp$. Osserviamo che π risulta ortogonale al piano affine σ, inoltre l'intersezione $\pi \cap \sigma$ coincide con il sottospazio affine per A avente come giacitura $span(u_1, u_2) \cap span(u_1, u_2)^\perp = \{\underline{0}\}$, pertanto $\pi \cap \sigma = \{A\}$. Le equazioni cartesiane del sottospazio $span(u_1, u_2)^\perp$ sono:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases},$$

risolvendo otteniamo una base per il sottospazio: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Infine possiamo scrivere una rappresentazione parametrica per il piano π:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + q \\ x_2 = 1 + \tau \\ x_3 = -1 + \tau \\ x_4 = 2 - \tau + q \end{cases} \qquad q, \tau \in \mathbb{R}.$$

(3) Sia $w = P - B$, le cui coordinate sono: $[w] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la retta affine l ha giacitura $span(w)$. Osserviamo che il vettore w è ortogonale a u_1 e u_2, pertanto la retta l è ortogonale al piano σ. Inoltre, $w \in span(u_1, u_2)^\perp = span(v_1, v_2)$, pertanto la retta l è parallela a π. Rimane da verificare che l non è contenuta nel piano π: infatti

il punto B non appartiene a π,. se per assurdo $B \in \pi$, allora avremmo che $u_1 = B - A$ sarebbe un vettore del sottospazio $span(u_1.u_2)^{\perp}$ che è la giacitura di π, e questo è assurdo!!

(4) Per prima cosa osserviamo che, poichè la retta PB è ortogonale a σ e $B \in \sigma$, si ha $d(P, \sigma) = d(P, B)$. Poichè la retta PB è parallela al piano π, si ha che $d(P, \pi) = d(B, \pi)$. La retta BA è ortogonale al piano π e $A \in \pi$, pertanto $d(B, \pi) = d(B, A)$. Infine, consideriamo il vettore $P-A$, abbiamo $P-A = (P-B)+(B-A)$, e i vettori $P - B = w$ e $B - A = u_1$ sono ortogonali, pertanto abbiamo:

$$d(P, A)^2 = ||P - A||^2 = ||P - B||^2 + ||B - A||^2 = d(P, B)^2 + d(A, B)^2 = d(P, \sigma)^2 + d(P, \pi)^2.$$