Soluzioni della Prova scritta del 16 giugno 2025

Esercizio 1 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Definiamo $T : V \to V$ come

$$T(p(x)) = p(x) + p(3 - x)$$

Ad esempio: $T(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + ((3 - x)^2 + 1) = 2x^2 - 6x + 11$.

(1) Verificare che T è lineare e dire se è un isomorfismo.
(2) Determinare dimensioni e basi di nucleo e immagine di T.
(3) Sia $W = \mathrm{Span}\{x, x^2 + 1\}$; determinare la dimensione e una base di $W \cap \mathrm{Im}\, T$.
(4) Dire se T è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una base formata da autovettori di T.

---

(1) Siano $p(x), q(x) \in V$, abbiamo:

$$T[p(x) + q(x)] = [p(x) + q(x)] + [p(3 - x) + q(3 - x)] = [p(x) + p(3 - x)] + [q(x) + q(3 - x)] = T(p(x)) + T(q(x));$$

siano $p(x) \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda p(x)) = [\lambda p(x)] + [\lambda p(3 - x)] = \lambda[p(x) + p(3 - x)] = \lambda T(p(x)).$$

Consideriamo la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ di V. Abbiamo:

$$T(1) = 1 + 1 = 2, \quad T(x) = x + 3 - x = 3, \quad T(x^2) = x^2 + (3 - x)^2 = 2x^2 - 6x + 9.$$

Sia A la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha rango 2, pertanto T non è un isomorfismo.
(2) Dal punto precedente ricaviamo che $\dim ImT = rk(A) = 2$. Abbiamo $ImT = span(2, 2x^2 - 6x + 9)$, i polinomi $p_1(x) = 2$ e $p_2(x) = 2x^2 - 6x + 9$ sono una base per lo spazio immagine. Dal teorema di nullitá+rango si ha che

$$\dim kerT = \dim V - \dim ImT = 3 - 2 = 1.$$

Osserviamo che $3T(1) - 2T(x) = 0$, pertanto per la linearitá di T si ha $T(3 - 2x) = 0$. Concludiamo che $KerT = span(3 - 2x)$.
(3) Abbiamo: $ImT = span(2, 2x^2 - 6x + 9) = span(1, 2x^2 - 6x) = span(1, x^2 - 3x)$ e $W = span(x, x^2 + 1)$. Consideriamo lo spazio somma $W + ImT = span(1, x^2 - 3x, x, x^2 + 1)$. Consideriamo le coordinate dei generatori di $W + ImT$, rispetto alla base fissata $\mathcal{B}$ e scriviamo la matrice che ha come colonne tali coordinate:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice B ha rango 3, pertanto $\dim(W + ImT) = 3$. Dalla formula di Grassmann otteniamo che:

$$\dim(W \cap ImT) = \dim W + \dim T - \dim(W + ImT) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Consideriamo il polinomio $q(x) = x^2 - 3x + 1$, si ha:

$$q(x) = (x^2 + 1) - 3(x) \in W, \quad q(x) = (x^2 - 3x) + 1 \in ImT,$$

pertanto $q(x) \in W \cap ImT$. Poiché risulta $\dim(W \cap ImT) = 1$, possiamo concludere che $W \cap ImT = span(q(x))$.
(4) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} 2 - t & 3 & 9 \\ 0 & -t & -6 \\ 0 & 0 & 2 - t \end{vmatrix} = -t(2 - t)^2.$$

Gli autovalori di T sono: $t = 0$ con $\mu(0) = 1$, $t = 2$ con $\mu(2) = 2$. Per $t = 0$ abbiamo: $V_0 = KerT = span(3 - 2x)$. Per $t = 2$, abbiamo $V_2 = Ker(T - 2Id_V)$, consideriamo la matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da cui otteniamo

$$\dim V_2 = \dim ker(A - 2I_3) = 3 - rk(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2.$$

Poichè risulta $m(0)+m(2)=\dim V$, possiamo concludere che T è diagonalizzabile. Infine l'equazione cartesiana di V_2 è $x_2+3x_3=0$, pertanto una base per V_2 è la seguente: $q_1(x)=1$ e $q_2(x)=x^2-3x$. Una base di V costituita da autovettori di T è la seguente:

$$\{1, x^2-3x, 3-2x\}.$$

Esercizio 2 Si consideri la seguente forma bilineare simmetrica $\phi_h\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$:

$$\phi_h(X,Y)={}^tXA_hY,\quad \forall X,Y\in\mathbb{R}^3,\quad A_h=\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale h.

(1) Stabilire, al variare di h, se ϕ_h è degenere o non degenere e determinare la segnatura di ϕ_h.
(2) Verificare che

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a ϕ_h, per ogni $h\in\mathbb{R}$.
(3) Sia $W\subset\mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x+y-z=0$. Determinare la dimensione ed una base per il sottospazio $W^{\perp_h}$ (ortogonale a W rispetto a ϕ_h), al variare di h.
(4) Stabilire per quali valori di h W e $W^{\perp_h}$ sono in somma diretta.

---

(1) Ricordiamo che ϕ_h è degenere se e solo se risulta $detA_h=0$;

$$det(A_h)=2(1-h^2)=0\iff h=1\quad h=-1.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_h:

$$p_{A_h}(t)=\begin{vmatrix}1-t & h & 0\\ h & 1-t & 0\\ 0 & 0 & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)(1-t-h)(1-t+h),$$

gli autovalori di A_h sono: 2, $1-h$, $1+h$. Osserviamo che:
- la segnatura di ϕ_h è $(3,0)$ se e solo se si ha $\begin{cases}1-h>0\\1+h>0\end{cases}$ cioé $-1<h<1$;
- se $h<-1$ o $h>1$, la segnatura di ϕ_h è $(2,1)$;
- se $h=+1$ o $h=-1$, la segnatura di ϕ_h è $(2,0)$.

(2) Innanzittutto verifichiamo che i vettori

$$\left\{v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. I vettori sono lineramente indipendenti poiché $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, pertanto sono una base di $\mathbb{R}^3$. Per verificare che sono una base ortogonale rispetto a ϕ_h, basta verificare che risulta $\phi_h(v_i,v_j)=0$, per ogni $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,3\}$ e $\forall h$. Abbiamo:

$$\phi_h(v_1,v_2)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+h\\1+h\\0\end{pmatrix}=0;$$

$$\phi_h(v_1,v_3)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=0;$$

$$\phi_h(v_2,v_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & h & 0\\ h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=0.$$

(3) Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x+y-z=0$, $W = span(w_1, w_2)$, con $w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e pertanto W ha dimensione 2. Ricordiamo che si ha

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ \phi_h(v,w) = 0\ \forall w \in W\} = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ \phi_h(v,w_1) = \phi_h(v,w_2) = 0\}$$

da cui ricaviamo, al variare di h, le equazioni cartesiane di $W^\perp$:

$$\begin{cases} x + hy + 2z = 0 \\ (h-1)(x-y) = 0 \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che se $h = 1$, $W^\perp$ è definito dall'equazione $x+y+2z=0$, quindi ha dimensione 2 e base $u_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Se $h \neq 1$, $W^\perp$ ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x + hy + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ pertanto ha dimensione 1 e una base è costituita dal vettore $u = \begin{pmatrix}2\\2\\-(1+h)\end{pmatrix}$.

(4) Ricordiamo che la somma di due sottospazi è diretta se e solo se la loro intersezione contiene solo il vettore nullo. Se $h = 1$, abbiamo $\dim W = \dim W^\perp = 2$, dalla formula di Grassmann otteniamo

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp \implies \dim(W \cap W^\perp) = 4 - \dim(W + W^\perp) \geq 1,$$

poiché $\dim(W + W^\perp) \leq 3$.
Se $h \neq 1$, abbiamo $\dim W = 2$ e $\dim W^\perp = 1$, dalla formula di Grassmann i due sottospazi sono in somma diretta se. e solo se $\dim(W + W^\perp) = 3$. Abbiamo $W + W^\perp = span(w_1, w_2, u)$, osserviamo che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -(1+h) \end{vmatrix} = h + 5 = 0 \iff h = -5.$$

Possiamo concludere che la somma dei sottospazi W e $W^\perp$ è diretta per ogni $h \neq 1$ e $h \neq -5$.

Esercizio 3 Fissato nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R}$, considerare il sottoinsieme $S_k \subset \mathbb{E}^4$ definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 = k \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Verificare S_k è un sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$, determinare dimensione e una base per la giacitura di S_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Verificare che esiste uno ed un solo k tale il sottospazio affine S_k contenga il punto $A \equiv_{\mathcal{R}} (0,1,0,0)$, determinare una rappresentazione parametrica di tale sottospazio.
(3) Determinare l'equazione cartesiana dell'iperpiano H passante per il punto A e ortogonale alla retta affine r di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.
(4) Verificare che S_k e H sono paralleli per ogni valore di k, stabilire per quali valori di k risulta S_k contenuto in H.

---

(1) S_k è definito da un sistema lineare non omogeneo, scriviamo la matrice completa del sistema:

$$\tilde{A} = (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

abbiamo che $rk(A) = rk(\tilde{A}) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, per cui $S_k \neq \emptyset$ e S_k è un sottospazio affine di dimensione 2. La giacitura di S_k è il sottospazio U definito dal sistema lineare omogeneo $AX = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che $U = span(u_1, u_2)$, dove $[u_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $[u_2] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) Il punto A appartiene al sottospazio affine S_k se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni cartesiane di S_k:

$$\begin{cases} 0+1=1 \\ 0+0+0=k \end{cases} \iff k=0.$$

Il sottospazio affine S_0 è il sottospazio per il punto A con giacitura U, pertanto una rappresentazione parametrica per S_0 è la seguente:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \\ x_2 = 1 - \alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(3) Per prima cosa determiniamo la direzione della retta affine r:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \\ x_4 = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo pertanto $r = span(v)$, dove $[v] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sia H l'iperpiano passante per A e ortogonale a r:

$$H = \{P \in \mathbb{E}^4 |\ P - A \perp v\ \},$$

da cui ricaviamo l'equazione cartesiana di H: $x_2 + x_3 - x_4 = 1$.

(4) S_k e H sono paralleli se e solo se la giacitura di S_k è contenuta nella giacitura di H. La giacitura di S_k è U per ogni $k \in \mathbb{R}$ e la giacitura di H è il sottospazio H_0 di equazione $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Pertanto S_k e H sono paralleli se e solo se $U \subset H_0$, se e solo se $u_1 \in H_0$ e $u_2 \in H_0$:

$$-1+1=0 \implies u_1 \in H_0 \quad 1-1=0 \implies u_2 \in H_0.$$

Infine, $S_k \subset H$ se e solo se $H \cap S_k \neq \emptyset$. Prendiamo un punto di S_k, ad esempio $P_k \equiv_{\mathcal{R}} (0, 1, 0, k)$, $P_k \in H$ se e solo se $1 - k = 1$, cioé $k = 0$.