Soluzioni della Prova scritta del 27 gennaio 2025 - TEMA 1

(1) Sia $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$. Fissata una matrice $B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ non nulla, si consideri l'applicazione:

$$L_B \colon Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

data da $L_B(A) = Tr(A).B$, dove $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ indica la traccia di A.

(a) Verificare L_B è un endomorfismo di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determinare dimensione e una base per i sottospazi $kerL_B$ e ImL_B.

(b) Determinare gli autovalori di L_B e verificare che L_B è diagonalizzabile se e solo se $Tr(B) \neq 0$.

(c) Posto $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, fissare una base $\mathcal{B}$ di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B)$.

(a) Per verificare che L_B è un endomorfismo di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ basta mostrare che soddisfa le condizioni di linearitá. Ricordiamo che si ha:

$$Tr(A + A') = Tr(A) + Tr(A'), \forall A, A' \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

$$Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Siano $A, A' \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, abbiamo:

$$L_B(A + A') = Tr(A + A')B = [Tr(A) + Tr(A')]B = Tr(A)B + Tr(A')B = L_B(A) + L_B(A'),$$

siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ abbiamo:

$$L_B(\lambda A) = Tr(\lambda A)B = [\lambda Tr(A)]B = \lambda[Tr(A)B] = \lambda L_B(A).$$

Osserviamo che $A \in KerL_B$ se e solo se $Tr(A)B = 0_{2\times 2}$, poiché B non è nulla necessariamente $Tr(A) = 0$. Abbiamo pertanto che

$$KerL_B = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} = 0\} = span\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Essendo linearmente indipendenti, le matrici scritte sopra sono una base di $KerL_B$, possiamo concludere che $\dim KerL_B = 3$. Dal Teorema di nullità+ rango otteniamo che $\dim ImL_B = 1$ e dalla definizione si evince immediatamente che $ImL_B = span(B)$, per cui una base di ImL_B è costituita dalla matrice B.

(b) Osserviamo che 0 è un autovalore di L_B e $V_0 = KerL_B$ ha dimensione 3, pertanto $m(0) = 3$ e $\mu(0) \geq 3$. Vediamo se esistono altri autovalori. Sia A un autovettore di L_B relativo all'autovalore α, allora $Tr(A)B = \alpha A$: o $\alpha = Tr(A) = 0$ oppure $A \in span(B)$ e $\alpha = Tr(B)$. Se $Tr(B) \neq 0$ abbiamo che $Tr(B)$ è un autovalore semplice e $m(0) + m(Tr(B)) = 4$, pertanto L_B è diagonalizzabile. Se invece $Tr(B) = 0$, allora 0 è l'unico autovalore con $m(0) = 3$, pertanto L_B non è diagonalizzabile.

(c) Fissiamo la base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Abbiamo:

$$L_B(E_{11}) = 1B = B, \quad L_B(E_{12}) = 0B = 0_{2\times 2}, \quad L_B(E_{21}) = 0B = 0_{2\times 2}, \quad L_B(E_{22}) = 1B = B.$$

Ricordando che la i-esima colonna della matrice si ottiene calcolando le coordinate dell'immagine dell'i-esimo vettore della base, abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e sia $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$. una base di V. Si ponga $\forall p(x), q(x) \in V$:

$$\phi(p(x), q(x)) = -2\left[p(0)q(1) + p(1)q(0)\right] + \left[p(0)q(-1) + p(-1)q(0)\right] + \frac{1}{2}\left[p(1)q(-1) + p(-1)q(1)\right].$$

(a) Verificare che ϕ è una forma bilineare simmetrica su V, trovarne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$ e calcolarne la segnatura.
(b) Si completi x^2 ad una base ortogonale di V rispetto a ϕ.
(c) Si dimostri che $U = \{p(x) \in V \ : \ \phi(p(x), x + x^2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovino la dimensione e una base.
(d) Posto $W_k = \text{Span}\{1 - x, x + kx^2\}$, si determini per quali k la restrizione di ϕ a W_k è definita positiva.

(a) Osserviamo che basta verificare che, presi $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente forma

$$\phi_{a,b}(p(x), q(x)) = p(a)q(b) + p(b)q(a)$$

è una forma bilineare simmetrica su V. Abbiamo per le proprietá commutative di prodotto e somma in $\mathbb{R}$:

$$\phi_{a,b}(q(x), p(x)) = q(a)p(b) + q(b)p(a) = p(a)q(b) + p(b)q(a) = \phi_{a,b}(p(x), q(x));$$

inoltre siano $p_1, p_2 \in V$, poiché $\forall c \in \mathbb{R}$ abbiamo $(p_1 + p_2)(c) = p_1(c) + p_2(c)$:

$$\phi_{a,b}(p_1 + p_2, q) = (p_1 + p_2)(a)q(b) + (p_1 + p_2)(b)q(a) = (p_1(a) + p_2(a))q(b) + (p_1(b) + p_2(b))q(a) =$$

$$= (p_1(a)q(b) + p_1(b)q(a)) + (p_2(a)q(b) + p_2(b)q(a)) = \phi_{a,b}(p_1, q) + \phi_{a,b}(p_2, q);$$

siano $p \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ poiché abbiamo $(\lambda p)(c) = \lambda p(c)$ $\forall c \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\phi_{a,b}(\lambda p, q) = (\lambda p)(a)q(b) + (\lambda p)(b)q(a) = (\lambda p(a))q(b) + (\lambda p(b))q(a) = \lambda(p(a)q(b) + p(b)q(a)) = \lambda\phi_{a,b}(p, q).$$

Per costruire la matrice $M_{\mathcal{B}}(\phi)$, calcoliamo le entrate a_{ij} con $i \leq j$:

$$a_{11} = \phi(1, 1) = -1, \quad a_{12} = \phi(1, x) = -3, \quad a_{13} = \phi(1, x^2) = 0,$$

$$a_{22} = \phi(x, x) = -1, \quad a_{23} = \phi(x, x^2) = 0, \quad a_{33} = \phi(x^2, x^2) = 1.$$

Otteniamo:

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'equazione caratteristica della matrice A:

$$(1 - t)[(-1 - t)^2 - 9] = (1 - t)(-t - 4)(2 - t) = 0 \implies t = 1 \quad t = 2 \quad t = -4,$$

da cui ricaviamo la segnatura di ϕ: $(2, 1, 0)$.
(b) Osserviamo x^2 è ortogonale ai polinomi x e 1. Consideriamo allora il polinomio:

$$p(x) = 1 - \frac{\phi(1, x)}{\phi(x, x)}x = 1 - 3x,$$

$p(x)$ è ortogonale sia a x che a x^2. Pertanto la base $(x^2, x, 1 - 3x)$ di V è ortogonale rispetto a ϕ.
(c) Siano $p_1, p_2 \in U$ per la linearitá di ϕ abbiamo:

$$\phi(p_1 + p_2, x + x^2) = \phi(p_1, x + x^2) + \phi(p_2, x + x^2) = 0 + 0 = 0, \implies p_1 + p_2 \in U;$$

siano $p \in U$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\phi(\lambda p, x + x^2) = \lambda\phi(p, x + x^2) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda p \in U.$$

Sia $p(x) = a + bx + cx^2$, abbiamo che $p \in U$ se e solo se:

$$\phi(p(x), x + x^2) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3a - b + c = 0, \implies c = 3a + b.$$

Abbiamo pertanto che $U = span(1 + 3x^2, x + x^2)$ e $dimU = 2$.
(d) Fissata la base $\mathcal{B}_k = (1 - x, x + kx^2)$ di W_k, sia ϕ_k la restrizione di ϕ a W_k, costruiamo la matrice $M_{\mathcal{B}_k}(\phi_k)$. Abbiamo:

$$\phi_k(1 - x, 1 - x) = \phi(1 - x, 1 - x) = 4,$$

$$\phi_k(1 - x, x + kx^2) = \phi(1 - x, x + kx^2) = -2,$$

$$\phi_k(x + kx^2, x + kx^2) = \phi(x + kx^2, x + kx^2) = k^2 - 1;$$

da cui ricaviamo:

$$M_{\mathcal{B}_k}(\phi_k) = C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & k^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che ϕ_k è definita positiva se e solo se gli autovalori della matrice C sono entrambi > 0. Poiché l'equazione caratteristica si C è $t^2 - Tr(C)t + det(C) = 0$, le radici sono entrambe positive se e solo se si ha: $\begin{cases} det(C) > 0 \\ tr(C) > 0 \end{cases}$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4(k^2 - 1) - 4 > 0 \\ 4 + k^2 - 1 > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k^2 - 2 > 0 \\ k^2 + 3 > 0 \end{cases} \implies k < -\sqrt{2} \cup k > \sqrt{2}.$$

---

(3) Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^4$, fissato un riferimento affine ortonormale $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}_o)$, si considerino la retta affine

$$r_t = P_t + span(v_t) \quad \text{essendo} \quad P_t \equiv (1 + t, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad [v_t] = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 - t \\ -t \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

e il sotto-spazio affine π di equazioni cartesiane $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0$.
(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane di r_t e le equazioni parametriche di π.
(b) Al variare del parametro reale t si studi la posizione reciproca di r_t e π
(c) Per $t = 1$ si determini la distanza $d(r_1, \pi)$ tra la retta r_1 e il piano π.

(a) Le equazioni parametriche di r_t sono, per ogni valore di t fissato:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t + q(1 - t) \\ x_2 = 1 + q(1 - t) \\ x_3 = 1 - qt \\ x_4 = 1 - qt \end{cases}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Per rappresentare r_t con equazioni cartesiane, abbiamo bisogno di 3 equazioni lineari indipendenti. Osserviamo che facendo la differenza tra le prime due equazioni del precedente sistema otteniamo $x_1 - x_2 = t$; analogamente facendo la differenza tra la terza e la quarta equazione otteniamo $x_3 - x_4 = 0$. Queste equazioni sono soddisfatte da tutti i punti di r_t. Sia $t \neq 0$, dalla quarta equazione del sistema

ricaviamo $q = (1 - x_4)\frac{1}{t}$ e sostituendo nella seconda otteniamo $tx_2 + (1-t)x_4 = 1$. Abbiamo una rappresentazione cartesiana per r_t , con $t \neq 0$:

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = t \\ tx_2 + (1-t)x_4 = 1 \end{cases}$$

Per $t = 0$, invece possiamo prendere la quarta equazione del sistema $x_4 = 1$ e ottenere

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

Concludendo la rappresentazione cartesiana trovata per $t \neq 0$ va bene anche per $t = 0$.
Per ottenere una rappresentazione cartesiana del piano affine π, poniamo $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = -\beta \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $U = span(u_1, u_2)$, dove $[u_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $[u_2] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(b) Iniziamo a controllare se esistono punti di intersezione tra r_t e π. Sia $P \in r_t$:
$P \equiv (1+t+q(1-t), 1+q(1-t), 1-qt, 1-qt)$ e $P \in r_t \cap \pi$ se e solo se soddisfa le equazioni cartesiane di π. Abbiamo:

$$\begin{cases} 1 + t + q(1-t) + 1 = 0 \\ 1 + q(1-t) + 1 + q(1-t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 0 \\ q + 2 = 0 \end{cases}$$

possiamo concludere che se $t \neq 0$ allora $r_t \cap \pi = \emptyset$, se $t = 0$ allora $r_0 \cap \pi = \{Q\}$, dove $Q \equiv (-1, -1, 1, 1)$.
Vediamo ora per quali valori di t la retta r_t è parallela a π. La condizione equivale a chiedere che $v_t \in span(u_1, u_2)$:

$$\begin{cases} 1 - t - t = 0 \\ 1 - t - t = 0 \end{cases} \implies t = \frac{1}{2}.$$

Concludendo, per $t \neq 0$ e $t \neq \frac{1}{2}$ r_t e π sono sghembi.
(c) Siano $A \in r_1$ e $B \in \pi$, si ha $A \equiv (2, 1, 1-q, 1-q)$ e $B \equiv (\beta, -\alpha, \alpha, \beta)$. Cerchiamo per quali valori dei parametri α, β, q la retta per i punti A e B è ortogonale sia a r_1 che a π. La giacitura della retta AB è data da $span(B - A)$ e $[B - A] = \begin{pmatrix} \beta - 2 \\ \alpha - 1 \\ \alpha - 1 + q \\ \beta - 1 + q \end{pmatrix}$. Imponendo che $B - A$ sia ortogonale a v_1, a u_1 e a u_2 abbiamo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2q = 2 \\ 2\alpha + q = 0 \\ 2\beta + q = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} q = \frac{5}{2} \\ \alpha = -\frac{5}{4} \\ \beta = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Otteniamo $A \equiv (2, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ e $B \equiv (\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4})$, per cui

$$d(r_1, \pi) = ||B - A|| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$