Algebra Lineare e Geometria - CdL Fisica e Matematica - 2025/26

3 febbraio 2026 – Durata: 30min

Cognome	Nome	Matricola

Domanda 1 Un insieme X con un'operazione interna $\bullet$ per cui esista un elemento neutro $e \in X$ è un gruppo se:

(A) $\bullet$ è associativa e ogni elemento ha un inverso. **(B)** $\bullet$ è distributiva. **(C)** $\bullet$ è un morfismo.

(D) $\bullet$ è commutativa e ogni elemeento diverso da e ha un inverso.

Domanda 2 Sia A una matrice simile a $2I$, allora

(A) A è diagonalizzabile se e solo se è invertibile. **(B)** A non è diagonalizzabile. **(C)** $A = 2I$

(D) A è la matrice nulla.

Domanda 3 Sia A una matrice 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$ tale che $\mathrm{tr}A = 1$ e $\det A = 2$, allora il polinomio caratteristico di A è:

(A) $\lambda^2 - \lambda + 2$. **(B)** $\lambda^2 + 2\lambda + 1$. **(C)** $\lambda^2 + \lambda + 2$. **(D)** $\lambda^2 - 2\lambda + 1$.

Domanda 4 Sia S un sottospazio affine di uno spazio affine $(A, V, +_A)$. La giacitura di S è:

(A) Un sottospazio W di V contenuto in S. **(B)** Un sottospazio W di V.

(C) Un sottospazio W di V formato dai vettori $P - Q$, al variare di P, Q in S.

(D) L'insieme dei vettori di V contenuti in S.

Domanda 5 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ generatori. Allora

(A) $\dim V > k$. **(B)** $\dim V < k$. **(C)** $\dim V \geq k$. **(D)** $\dim V \leq k$.

Domanda 6 Sia A una matrice invertibile 3×3 con $A = A^{-1}$. Allora

(A) $\det(A^2) = 1$. **(B)** $\det(A^2) = -1$. **(C)** $\det(A^2) = 0$. **(D)** $\det(A^2) = 2$.

Domanda 7 Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W, allora:

(A) L trasforma basi di V in basi di W. **(B)** L trasforma basi di V in basi di ImL.

(C) L trasforma insiemi di vettori linearmente indipendenti in insiemi di vettori linearmente indipendenti.

(D) L conserva le combinazioni lineari.

Domanda 8 Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se:

(A) U è non vuoto, è chiuso rispetto all'operazione di addizione e rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

(B) Le operazioni di V valgono anche per i vettori di U. **(C)** U è un sottoinsieme non vuoto di V.

(D) U contiene il vettore nullo di V.

Domanda 9 Sia $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V. La forma ϕ è definita positiva se e solo se

(A) la matrice associata a ϕ in una qualsiasi base ha entrate positive.

(B) la matrice associata a ϕ in una qualsiasi base ha dimensione del nucleo positiva.

(C) la matrice associata a ϕ in una qualsiasi base ha tutti gli autovalori positivi.

(D) la matrice associata a ϕ in una qualsiasi base ha determinante positivo.

Domanda 10 Sia (V, ϕ) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia $U \subset V$ un sottospazio di V e $U^\perp$ il sottospazio ortogonale s U, allora:

(A) $U^\perp$ contiene solo il vettore nullo. **(B)** $\dim(U \cap U^\perp) \geq 1$. **(C)** $U \cap U^\perp = \emptyset$. **(D)** $U \oplus U^\perp = V$.

RISPOSTE

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
T1										

Algebra Lineare e Geometria - CdL Fisica e Matematica - 2025/26

3 febbraio 2026 – Durata: 30min

Cognome	Nome	Matricola

Domanda 1 Un'operazione binaria interna $\star$ su un insieme X si dice associativa se

(A) $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ per ogni $x, y.z \in X$. **(B)** ad ogni $x \in X$ associa un unico $\star x \in X$.

(C) $x \star y = y \star x$ per ogni $x, y \in X$. **(D)** esiste un elemento $e \in X$ tale che $e \star x = x \star e = x$ per ogni $x \in X$.

Domanda 2 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\{u, v, w\}$ una sua base, allora possiamo dire che:

(A) esiste un'unica $L : V \to V$ lineare tale che $L(u) = u$, $L(v) = v$, $L(u + v) = 0$.

(B) per ogni $L : V \to V$ lineare si ha $L(u) = u$, $L(v) = v$, $L(u + v) = 0$.

(C) se $L : V \to V$ è lineare, allora è impossibile che $L(u) = u$, $L(v) = v$, $L(u + v) = 0$.

(D) se $L : V \to V$ è lineare e $L(u) = u$, $L(v) = v$, allora $L(u + v) = 0$.

Domanda 3 Sia $L\colon V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$, se $dim(V) = n \geq 1$, allora:

(A) L ammette almeno n autovalori. **(B)** 0 non è mai un autovalore di L.

(C) L ammette al massimo n autovalori. **(D)** L ha sempre n autovalori distinti.

Domanda 4 Sia $\phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V di dimensione n, se ϕ ha segnatura (p, q) allora:

(A) Esiste una base di V ortogonale rispetto a ϕ in cui ϕ is rappresenta con la matrice I_q.

(B) Esiste una base di V ortogonale rispetto a ϕ in cui ϕ is rappresenta con la matrice I_p.

(C) Esiste una base di V ortogonale rispetto a ϕ in cui ϕ is rappresenta con la matrice I_n.

(D) Per ogni base di V, ortogonale rispetto a ϕ, p è il numero dei vettori $\mathbf{v}_i$ tali che $\phi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) > 0$ e q è il numero dei vettori $\mathbf{v}$

Domanda 5 Sia (V, ϕ) uno spazio euclideo. Dati $v, w \in V$, in quale dei seguenti casi si ha $\|v\| \cdot \|w\| + \phi(v, w) = 0$?

(A) Se $\|v\| = \|w\|$. **(B)** Se $w = 3v$. **(C)** Se $\phi(v, w) = 0$. **(D)** Se $w = -v$.

Domanda 6 Se il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni allora:

(A) Il sistema è omogeneo. **(B)** Il rango di A coincide con il rango di $\tilde{A} = (A|B)$.

(C) La matrice A è invertibile. **(D)** B è il vettore nullo.

Domanda 7 Sia $(A, V, +_A)$ uno spazio affine di dimensione n. Un riferimento affine $\mathcal{R}$ è:

(A) La scelta di una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V. **(B)** La scelta di un punto O nello spazio affine.

(C) La scelta di un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$.

(D) La scelta di un punto O nello spazio affine e di una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale V.

Domanda 8 Sia A una matrice $n \times n$ a entrate reali. Quale delle seguenti condizioni è sufficiente per concludere che A è diagonalizzabile (sui reali)?

(A) Tutti gli autovalori reali di A hanno molteplicità algebrica 1.

(B) Tutti gli autovalori reali di A hanno molteplicità geometrica pari a quella algebrica.

(C) A ha n autovalori reali distinti.

(D) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali è pari a n.

Domanda 9 Siano U e W sottospazi di $\mathbb{R}^3$ con $\dim(U) = \dim(W) = 2$, allora:

(A) $U \cap W$ contiene solo il vettore nullo di V. **(B)** $\dim(U \cup W) \leq 1$. **(C)** $U \cap W = \emptyset$

(D) $\dim(U \cap W) \geq 1$.

Domanda 10 La dimensione di uno spazio vettoriale V finitamente generato su $\mathbb{K}$ è:

(A) Il numero delle entrate di un vettore di V. **(B)** Il numero dei generatori non nulli di V.

(C) Il numero dei generatori di V. **(D)** La cardinalitá di una qualsiasi base di V.

RISPOSTE

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
T2										

Algebra Lineare e Geometria - CdL Fisica e Matematica - 2025/26

3 febbraio 2026 – Durata: 30min

Cognome	Nome	Matricola

Domanda 1 Sia A una matrice $n \times n$ a entrate reali. Quale delle seguenti condizioni garantisce che A sia diagonalizzabile (sui reali)?

(A) Tutti gli autovalori reali di A hanno molteplicità geometrica 1. **(B)** Tutti gli autovalori di A sono reali.

(C) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali è pari a n.

(D) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali è pari a n.

Domanda 2 L'immagine di un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W è:

(A) L'insieme che contiene il vettore nullo di W.

(B) L'insieme dei vettori di W che sono immagine di almeno un vettore di V. **(C)** L'insieme vuoto.

(D) L'insieme dei vettori di W che ammettono una ed una controimmagine in V.

Domanda 3 Sia (V, ϕ) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} \in V$ sul sottospazio $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}$ è:

(A) Il vettore $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{v}$. **(B)** L'unico vettore ortogonale a $\mathbf{u}$. **(C)** Un vettore ortogonale a $\mathbf{u}$.

(D) L'unico vettore $\mathbf{v}' \in \mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}$ tale che $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è ortogonale a $\mathbf{u}$.

Domanda 4 Sia A una matrice , $n \times n$, ad entrate in un campo $\mathbb{K}$ tale che $det(A) = 0$, allora:

(A) La matrice A è nulla. **(B)** A 'e invertibile. **(C)** Le colonne di A sono linearmente dipendenti

(D) Il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ ammette solo la soluzione banale.

Domanda 5 Sia A una matrice 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$ tale che $\mathrm{tr}A = 2$ e $\det A = 1$, allora il polinomio caratteristico di A è:

(A) $\lambda^2 + 2\lambda + 1$. **(B)** $\lambda^2 + \lambda + 2$. **(C)** $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. **(D)** $\lambda^2 - \lambda + 2$.

Domanda 6 Siano V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ e U e W sottospazi di V, allora:

(A) $\dim(U+W) \leq \dim(U) + \dim(W)$ **(B)** $U \cap W = \emptyset$ **(C)** $U + W$ coincide necessariamente con $U \cup W$.

(D) $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Domanda 7 Un insieme X con un'operazione interna $\bullet$ per cui esista un elemento neutro $e \in X$ è un gruppo se:

(A) $\bullet$ è associativa e ogni elemento ha un inverso. **(B)** $\bullet$ è distributiva.

(C) $\bullet$ è commutativa e ogni elemeento diverso da e ha un inverso. **(D)** $\bullet$ è un morfismo.

Domanda 8 Sia $(A, V, +_A)$ uno spazio affine e siano p, q, r punti di A. Il sottospazio affine generato da p, q, r è un piano se e solo se

(A) $p - q$ e $q - r$ sono linearmente indipendenti. **(B)** esistono $v, w \in V$ tali che $p = q +_A v$ e $r = q +_A w$.

(C) $p - q = r - q$. **(D)** $\dim \mathrm{Span}\{p - q, r - q\} = 1$.

Domanda 9 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ costituiscono una base di V se:

(A) Sono un insieme di generatori di V linearmente dipendenti. **(B)** Sono un insieme di generatori di V.

(C) Sono un insieme di vettori linearmente indipendenti in V.

(D) Sono un insieme di generatori di V linearmente indipendenti.

Domanda 10 Sia $\phi \colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V di dimensione n, sia A la matrice associata a ϕ rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V, allora:

(A) A è sempre una matrice invertibile. **(B)** A è sempre la matrice identitá di ordine n.

(C) A è una matrice simmetrica.. **(D)** A è sempre una matrice diagonale.

RISPOSTE

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
T3										

Algebra Lineare e Geometria - CdL Fisica e Matematica - 2025/26

3 febbraio 2026 – Durata: 30min

Cognome	Nome	Matricola

Domanda 1 Sia A una matrice $n \times n$ a entrate reali. Quale delle seguenti condizioni garantisce che A sia diagonalizzabile (sui reali)?

(A) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali è pari a n.

(B) Tutti gli autovalori reali di A hanno molteplicità geometrica 1.

(C) La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali è pari a n.

(D) Tutti gli autovalori di A sono reali.

Domanda 2 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a entrate reali. Quale dei seguenti non è un suo sottospazio vettoriale?

(A) L'insieme delle matrici con somma di tutte le entrate pari a 1.

(B) L'insieme delle matrici diagonali.

(C) L'insieme delle matrici simmetriche.

(D) L'insieme delle matrici con somma degli elementi sulla diagonale pari a 0.

Domanda 3 Sia (V, ϕ) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} \in V$ sul sottospazio $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}$ è:

(A) L'unico vettore ortogonale a $\mathbf{u}$.

(B) L'unico vettore $\mathbf{v}' \in \mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}$ tale che $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ è ortogonale a $\mathbf{u}$.

(C) Il vettore $\phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{v}$.

(D) Un vettore ortogonale a $\mathbf{u}$.

Domanda 4 Sia $L\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W, allora:

(A) L trasforma basi di V in basi di ImL.

(B) L conserva le combinazioni lineari.

(C) L trasforma basi di V in basi di W.

(D) L trasforma insiemi di vettori linearmente indipendenti in insiemi di vettori linearmente indipendenti.

Domanda 5 Sia $(A, V, +_A)$ uno spazio affine di dimensione n. Se due rette affini r e s sono parallele, allora:

(A) Le giaciture di r e s sono sottospazi ortogonali.

(B) Le giaciture di r e s sono nulle.

(C) La giacitura di r coincide con la giacitura di s.

(D) L'intersezione tra la giacitura di r e la giacitura di s contiene solo il vettore nullo.

Domanda 6 La dimensione di uno spazio vettoriale V finitamente generato su $\mathbb{K}$ è:

(A) Il numero dei generatori non nulli di V. **(B)** La cardinalitá di una qualsiasi base di V.

(C) Il numero delle entrate di un vettore di V. **(D)** Il numero dei generatori di V.

Domanda 7 Sia A una matrice $n \times n$ a entrate reali tale che $\dim \ker A > 0$, allora sicuramente:

(A) 0 è autovalore di A. **(B)** 1 è autovalore di A. **(C)** $\det(A) > 0$. **(D)** $A = 0$.

Domanda 8 Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, i vettori $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti in V se:

(A) Esiste un vettore $\mathbf{v}_i$ che è combinazione lineare dei rimanenti. **(B)** I vettori sono tutti non nulli.

(C) L'unica loro combinazione lineare che dá il vettore nullo è quella banale .

(D) Sono un insieme di generatori di V.

Domanda 9 Sia $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale reale V. Sapendo che esiste $v \in V$, tale che $\phi(v, v) = 1$, quale conclusione possiamo trarre con certezza?

(A) ϕ è indefinita. **(B)** ϕ è degenere. **(C)** ϕ non è né definita positiva, né definita negativa.

(D) ϕ non è né definita negativa, né semidefinita negativa.

Domanda 10 Sia A una matrice , $n \times n$, ad entrate in un campo $\mathbb{K}$, se le colonne di A sono linearmente dipendenti allora:

(A) A 'e invertibile. **(B)** A ha rango $\leq n - 1$.

(C) Il sistema lineare omogeneo $AX = 0$ ammette solo la soluzione banale. **(D)** $det(A) \neq 0$.

RISPOSTE

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
T4										