RICHIAMI di MATEMATICA
ESERCIZI: disequazioni algebriche e sistemi

Principi di equivalenza:

1) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$;
2) Se $k > 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) > kB(x)$;
3) Se $k < 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) < kB(x)$;

In conseguenza si hanno le seguenti equivalenze:

a) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow -A(x) < -B(x)$;

b) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow C(x) \cdot A(x) > C(x) \cdot B(x)$, per ogni x tale che $C(x) > 0$;

c) $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$, per ogni x tale che $B(x) \neq 0$.

Disequazioni di primo grado.

Se $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$;

Se $a < 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$.

1. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $2(x + 2) - 5(x + 3) \leq 1$;

b) $\dfrac{x + 3}{2} + x - 2 > \dfrac{3x + 3}{2} - 3$;

c) $(x - 1)^2 - 3(x + 1) > x(x + 2)$;

Risposte.

a) $x \geq -4$; b) $\forall x$; c) $x < -\dfrac{2}{7}$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni in dipendenza dal parametro a reale.

a) $ax - 3(x - 1) > -2x$;

b) $x - 5 > (a^2 + 1)\, x$;

c) $ax + 7 < (a - 1)x$.

Risposte.

a) se $a > 1, x > -\dfrac{3}{a - 1}$; se $a = 1, \forall x$; se $a < 1, x < -\dfrac{3}{a - 1}$;

b) se $a = 0$, impossibile; se $a \neq 0, x < -\dfrac{5}{a^2}$; c) $x < -7, \forall a$.

Disequazioni di secondo grado.

Esaminiamo una disequazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c > 0$, oppure $ax^2 + bx + c < 0$, dove $a > 0$ (se $a < 0$, si perviene a questo caso moltiplicando entrambi i membri per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza).

Supponiamo allora

$$a > 0, \quad P(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

(Δ discriminante del trinomio di secondo grado).

Allora

1) se $\Delta > 0$,
allora $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ha due radici reali distinte:
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$
e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1, x > x_2$.

2) se $\Delta = 0$,
allora $P(x) = a(x - x_0)^2$ ha due radici reali coincidenti $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$,
e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq x_0$;

3) se $\Delta < 0$,
$P(x)$ non ha radici reali, e $P(x) > 0 \ \forall x \in R$.

3. Risolvere le seguenti disequazioni.
a) $x - 2x^2 > 5$;
b) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$;
c) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$;
d) $x^2 - 5x + 2 > 0$;
e) $4x^2 - 3x \leq 1$;
f) $(x + 1)(5x + 1) \leq 4x(2 + x)$;
g) $4x(x - 2) < 11 + (x - 4)^2$;
h) $x^2 - 9 \leq 0$;
i) $x^2 < 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$.

Risposte.
a) Impossibile; b) $\forall x$; c) $x = \dfrac{3}{2}$; d) $x < \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}, x > \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$; e) $-\dfrac{1}{4} \leq x \leq 1$; f) $x = 1$; g) $-3 < x < 3$; h) $-3 \leq x \leq 3$; i) impossibile.

Disequazioni di grado superiore al secondo $P_n(x) > 0$ o $P_n(x) < 0, n > 2$.

Nel caso in cui il polinomio P_n si scompone in fattori di primo e secondo grado, si riportano i segni dei fattori in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni del prodotto.

4. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $x^3 - 2x^2 > x - 2$;

b) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x + 3)(1 - x) \geq 0$;

c) $(x^2 + x)(3x + 1)^2(6x^2 + 2) < 0$;

d) $x^3 < -5x - 6$.

Risposte.

a) $-1 < x < 1, x > 2$; b) $x \leq 1 - \sqrt{3}, 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$; c) $-1 < x < 0, x \neq -\frac{1}{3}$; d) $x < -1$.

Disequazioni razionali fratte $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$ o $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$.

Si studia separatamente il segno di $A(x)$ e di $B(x)$, si riportano i segni in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni come per il prodotto.

5. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\dfrac{3x}{x+2} \geq 1$;

b) $\dfrac{(5x-2)^3}{x-1} \leq 0$;

c) $\dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{2x-3}{x-4} \geq \dfrac{x}{x-2}$;

e) $\dfrac{x^2-3}{x^2+3} > \dfrac{x^2+3}{x^2-3}$;

f) $\dfrac{2x^2-3}{3x+1} + 3 > 0$.

Risposte.

a)$x < -2, x \geq 1$; b)$\frac{2}{5} \leq x < 1$; c)$x < -3, x > 1$; d)$x < 2, x > 4$; e)$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, x \neq 0$; f)$-\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{3}, x > 0$.

Sistemi di disequazioni.

L'insieme delle soluzioni è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna disequazione del sistema.

6. Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x^2 - 25 \leq 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + 2 \geq 0 \\ \dfrac{x-2}{x+3} < 0 \\ x > 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^2 + 5 \leq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$

Risposte.

a) $-5 < x \leq 5$; b) $0 < x < 2$; c) $-3 < x \leq -1, x = 4$; d)$3 < x < 4$; e) impossibile.

Disequazioni col valore assoluto.

Sono importanti i due casi particolari seguenti.

i) La disequazione $|x| \geq b$

se $b \leq 0$, è verificata $\forall x$,

se $b \geq 0$, è verificata sse $x \leq -b \vee x \geq b$.

ii) La disequazione $|x| \leq b$

se $b < 0$, è impossibile,

se $b \geq 0$, è verificata sse $-b \leq x \leq b$.

7. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $|x+2| < 1$;

b) $|x^2 - 4x + 2| < 2$;

c) $|x^2 - 4x + 2| \leq 2$;

d) $|2x - 3| > 5$.

e) $|3x - 1| > x$.

Risposte.

a) $-3 < x < -1$; b) $0 < x < 4, x \neq 2$; c) $0 \leq x \leq 4$ d) $x < -1, x > 4$; e) $x < \frac{1}{4}, x > \frac{1}{2}$.

Disequazioni irrazionali.

Per risolvere una disequazione irrazionale è utile ricordare che:

se n è un intero positivo *dispari* allora

$A^n(x) \geq B^n(x) \Leftrightarrow A(x) \geq B(x)$,

se n è un intero positivo *pari* allora

$A^n(x) \geq B^n(x)$ è equivalente a $A(x) \geq B(x)$ *solo se* $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$.

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *dispari*, si isola il radicale e si elevano entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale, ottenendo una disequazione equivalente.

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *pari*, si isola il radicale e si deve studiare il segno dell'altro membro prima di elevare entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale. Ricordiamo inoltre che un radicale di indice pari è reale solo se il radicando è ≥ 0 (*condizione di realtà)*, ed è sempre non negativo (quando reale).

Sono importanti i due casi particolari seguenti ($n = 2$).

i) La disequazione $\sqrt{P(x)} \geq b$

se $b \leq 0$, è equivalente a $P(x) \geq 0$ (cdr del radicale);

se $b \geq 0$, è equivalente a $P(x) \geq b^2$.

ii) La disequazione $\sqrt{P(x)} \leq b$

se $b < 0$, è impossibile;

se $b \geq 0$, è equivalente a $0 \leq P(x) \leq b^2$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\sqrt{2x+6} < 4$;

b) $\sqrt{-4 - x^2 + 2x} - 2 \leq 0$;

c) $\sqrt{x+3} > 2$;

d) $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt{2-x} \geq 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3+3x+9} > x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 > 0$;

g) $x < \sqrt{2-x}$;

h) $\sqrt{x} < x$;

i) $\sqrt{2x-3} < x$;

l) $\sqrt{x^2-4} < |x|$.

Risposte.

a) $-3 \leq x < 5$; b) impossibile; c) $x > 1$; d) impossibile; e) $x > -3$; f) $x > 9$ (porre $\sqrt{x} = t \geq 0$); g) $x < 1$; h) $x > 1$; i)$x \geq \frac{3}{2}$; l) $x \leq -2, x \geq 2$.