RICHIAMI di MATEMATICA
ESERCIZI: coniche

La parabola.

E' il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta, detta direttrice, e da un punto fisso, detto fuoco.

L'equazione della parabola con retta direttrice orizzontale è:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Il punto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ si chiama *vertice* della parabola e $x = -\frac{b}{2a}$ è l'equazione dell'*asse di simmetria* della parabola.

Se $a > 0$ la parabola ha concavità rivolta verso l'alto, se $a < 0$, verso il basso.

Il punto $(0, c)$ è il punto di intersezione con l'asse y. Gli eventuali punti di intersezione con l'asse x hanno come ascissa le radici reali del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Pertanto, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ la parabola interseca l'asse x in due punti distinti, se $\Delta = 0$ interseca l'asse x solo nel vertice, se $\Delta < 0$ non lo interseca mai.

18. Disegnare "per punti" su uno stesso riferimento cartesiano le seguenti parabole:

a) $y = x^2$, $y = 2x^2$;
b) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$;
c) $y = x^2$, $y = (x-1)^2$, $y = (x-1)^2$.

19. Disegnare le seguenti parabole dopo averne determinato il verso della concavità, le coordinate del vertice e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

a) $y = 4x^2 - 1$; b) $y = 4x - x^2$;
c) $y = x^2 + 2x + 6$; d) $y = -2x^2 + x - 1$.

20. Scrivere le equazioni delle parabole che passano per i seguenti punti:

a) $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (-2, -3)$;
b) $A = (1, 5)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-4, 0)$.

Risposte.

a) $y = -x^2 + 1$; b) $y = x^2 + 4x$.

21. Determinare l'equazione della parabola che ha vertice nel punto $V = (\frac{1}{2}, -2)$ e passa per il punto $A = (1, -1)$.

Risposta.

$y = 4x^2 - 4x - 1$.

22. Determinare i punti di intersezione della retta $x + y - 3 = 0$ e la parabola $y = \frac{1}{4}x^2$.

Risposta.

$(2, 1), (-6, 9)$.

La circonferenza.

E' il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto fisso detto centro. Tale distanza è detta raggio della circonferenza.

Se il centro è $C = (x_0, y_0)$ e il raggio è r, l'equazione è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

e svolgendo i quadrati si ottiene $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$.

Pertanto una equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

è l'equazione di una circonferenza *solo se* $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In tale caso il centro e il raggio sono:

$$C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), \qquad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.}$$

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, l'equazione ha solo la soluzione $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali e non è l'equazione di una circonferenza nel piano cartesiano.

23. Dire se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza e in tal caso trovare le coordinate del centro e il raggio.

a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 24 = 0$;

c) $7x^2 + 7y^2 + 14x - 56y - 25 = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.

Risposte.

a) $C = (5, -4), r = 6$; b) no; c) $C = (-1, 4), r = \frac{12}{7}\sqrt{7}$; d) no.

L'ellisse

E' il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

L'equazione dell'ellisse in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse; i punti di intersezione con gli assi sono $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

L'iperbole

E' il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

L'equazione dell'iperbole in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le rette di equazione $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ cui la curva si avvicina indefinitamente, si chiamano *asintoti* dell'iperbole.

I punti $A_{1,2} = (\pm a, 0)$ si chiamano vertici dell'iperbole.

Se $a = b$ gli asintoti si intersecano ad angolo retto e l'iperbole si dice *equilatera*. Applicando una rotazione di 45° in senso antiorario, si ottiene l'equazione di una *iperbole equilatera riferita ai propri asintoti*:

$$xy = k^2.$$

In questo caso i vertici sono i punti $A_{1,2} = \pm(k, k)$.

24. Interpretare i seguenti sistemi disegnando i luoghi geometrici definiti dalle loro equazioni, quindi risolverli:

a) $\begin{cases} x - y - 10 = 0 \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} xy = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} y - \dfrac{1}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2+y^2+x+4y+4 &= 0 \\ x^2+y^2-2x-2y+1 &= 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x^2+y^2+4y+4 &= 0 \\ x^2-\frac{1}{2}y^2-1 &= 0 \end{cases}$

Risposte.

a) Impossibile intersezione tra la retta e l'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $4, 2$.

b) Due intersezioni $(\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{7}}{2})$ tra la retta e la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2.

c) Due intersezioni $(-1,-1), (\frac{1}{2}, 2)$ tra la retta e l'iperbole equilatera di centro $(0,0)$ riferita ai propri asintoti.

d) Una intersezione $(-2,2)$ tra due circonferenze, una di centro $(-2,0)$ e raggio 2 e una di centro $(-2,4)$ e raggio 2.

e) Due intersezioni $(1,2), (-1,0)$ tra l'iperbole equilatera traslata nel centro $(0,1)$ e asintoti $x=0$ e $y=1$, e la circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio $\sqrt{2}$.

f) Impossibile intersezione tra due circonferenze, una di centro $(-\frac{1}{2}, -2)$ e raggio $\frac{1}{2}$,, l'altra di centro $(1,1)$ e raggio 1.

g) Impossibile intersezione tra il solo punto $(0,-2)$ e l'iperbole di centro $(0,0)$, vertici $(\pm 1, 0)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{2}x$

25. Calcolare:

a) l'area del quadrato inscritto nella circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 9$;

b) l'area del rettangolo inscritto nella circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 5$ e con due vertici di ascissa $x=1$;

c) l'area del rombo le cui diagonali sono gli assi dell'ellisse di equazione $9x^2+4y^2-16=0$.

Risposte.

a) 18; b) 8; c) $\frac{16}{3}$.

26. Rappresentare in un piano cartesiano i luoghi geometrici definiti dalle seguenti relazioni.

a) $x < y$;

b) $y > 2x$;

c) $y < x^2$;
d) $y > x^2 + 1$;
e) $x^2 + y^2 < 1$;
f) $xy > 0$;
g) $xy < 0$;
h) $xy = 0$;
i) $xy < 1$;
l) $x^2 - y^2 < 1$;
m) $x^2 + y^2 \geq 4$;
n) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} < 1$;
o) $x + y > 0$;
p) $xy > -1$.