# STATISTICA: esercizi svolti su

# MEDIA GEOMETRICA
# MEDIA ARMONICA e
# MEDIA QUADRATICA

# 1 MEDIA GEOMETRICA, ARMONICA, QUADRATICA

1. Calcolare la media aritmetica dei logaritmi dei seguenti valori:

$$2; \quad 4; \quad 8; \quad 16; \quad 32; \quad 64; \quad 128.$$

Dedurne quindi la media geometrica.

**Svolgimento**
Per calcolare la media aritmetica dei logaritmi dei valori indicati dal testo dell'esercizio, predisponiamo la seguente tabella (in cui si è fatto uso dei logaritmi naturali):

| $\mathbf{x_i}$ | $\log(\mathbf{x_i})$ |
|---|---|
| 2 | 0.6931 |
| 4 | 1.3863 |
| 8 | 2.0794 |
| 16 | 2.7725 |
| 32 | 3.4657 |
| 64 | 4.1589 |
| 128 | 4.8520 |
| **tot** | 19.4081 |

Abbiamo dunque che:

$$M_1(\log X) = \frac{19.4081}{7} = 2.7726.$$

Ricordiamo che la media aritmetica dei logaritmi di $N$ valori positivi coincide con il logaritmo della media geometrica[1], in formule:

$$M_1(\log X) = \log(M_0(X)).$$

Di conseguenza:

$$M_0(X) = e^{M_1(\log X)}.$$

Grazie a quest'ultima espressione abbiamo che:

$$M_0(X) = e^{2.7726} = 16.$$

La media geometrica dei valori riportati dal testo dell'esercizio è di conseguenza pari a 16. Quale verifica della correttezza dei calcoli appena svolti, ricaviamo il valore di $M_0(X)$ utilizzando anche il procedimento diretto.

$$M_0(X) \quad = \quad \sqrt[7]{\prod_{i=1}^{7} x_i}$$

[1] Zenga M., *Lezioni di statistica descrittiva*, pag 131: prima proprietà della media geometrica.

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[7]{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128} \\
&= \sqrt[7]{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7} \\
&= \sqrt[7]{2^{28}} \\
&= 2^{\frac{28}{7}} = 2^4 = 16.
\end{aligned}
$$

Che coincide con quanto ricavato in precedenza.

2. Le temperature della neve in gradi centigradi di una nota località sciistica nel mese di agosto sono state le seguenti:

| $x_j$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 2 | 4 | 6 | 5 | 8 | 6 |

dove $n_j$ è il numero di giorni in cui si è registrata la temperatura $x_j$ in gradi centigradi. Calcolare la media geometrica della distribuzione.

**Svolgimento**
Il numero totale di giorni in cui è stata rilevata la temperatura della neve nella località sciistica è dato da:

$$N = 2 + 4 + 6 + 5 + 8 + 6 = 31.$$

Indicando con $k$ il numero delle modalità del carattere "temperatura in gradi centigradi" che si sono effettivamente osservate, la media geometrica della distribuzione è data da:

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \sqrt[N]{\prod_{j=1}^{k} x_j^{n_j}} \\
&= \sqrt[31]{6^2 \cdot 5^4 \cdot 4^6 \cdot 3^5 \cdot 2^8 \cdot 1^6} \\
&= 2.5796
\end{aligned}
$$

Possiamo dunque concludere dicendo che la media geometrica delle temperature della neve rilevate durante mese d'agosto nella nota località sciistica è pari a 2.5796 $C^\circ$.

3. Una classe di studenti che hanno frequentato il liceo insieme si trova alla cena di classe ad un paio d'anni dalla maturità. Sia $X$ il numero di esami sostenuti durante i primi due anni di iscrizione all'università:

| $X$ | $0 \vdash\!\dashv 1$ | $2 \vdash\!\dashv 4$ | $5 \vdash\!\dashv 7$ | $8 \vdash\!\dashv 9$ |
|---|---|---|---|---|
| *n° studenti* | 6 | 10 | 8 | 4 |
| *Totale esami sostenuti* | 4 | 27 | 52 | 33 |

Si valuti la media geometrica della distribuzione, sia ricorrendo all'informazione fornita dalla terza riga della tabella, sia non ricorrendovi.

**Svolgimento**
Si supponga in primo luogo di essere in possesso dell'informazione fornita dalla terza riga della tabella riportata nel testo dell'esercizio. In tal caso è ragionevole sintetizzare ciascuna classe in cui è raggruppato il carattere "numero di esami sostenuti" mediante la media aritmetica degli esami sostenuti dagli studenti che appartengono a ciascuna delle classi stesse. Queste medie ($x_j$), insieme ad altri calcoli che ci saranno utili nel seguito, sono riportate nella seguente tabella:

| **X** | **n° studenti** $\mathbf{n_j}$ | **Tot. esami** $\mathbf{x_j \cdot n_j}$ | $\mathbf{x_j}$ | **val. centrale** $\mathbf{c_j}$ |
|---|---|---|---|---|
| $0 \vdash\dashv 1$ | 6 | 4 | 0.6667 | 0.5 |
| $2 \vdash\dashv 4$ | 10 | 27 | 2.7 | 3 |
| $5 \vdash\dashv 7$ | 8 | 52 | 6.5 | 6 |
| $8 \vdash\dashv 9$ | 4 | 33 | 8.25 | 8.5 |
| **tot.** | 28 | – | – | – |

La media geometrica calcolata sfruttando le informazioni della terza riga della tabella è data da:

$$\begin{aligned} M_0^{'} &= \sqrt[28]{\prod_{j=1}^{4} x_j^{n_j}} \\ &= \sqrt[28]{(0.6667)^6 \cdot (2.7)^{10} \cdot (6.5)^8 \cdot (8.25)^4} \\ &= 3.0165 \end{aligned}$$

Supponendo invece di non essere in possesso delle informazioni contenute nella terza riga della tabella, è ragionevole sintetizzare ciascuna classe mediante i loro valori centrali $c_j$. In questo caso la media geometrica risulta essere data da:

$$\begin{aligned} M_0^{''} &= \sqrt[28]{\prod_{j=1}^{4} c_j^{n_j}} \\ &= \sqrt[28]{(0.5)^6 \cdot (3)^{10} \cdot (6)^8 \cdot (8.5)^4} \\ &= 2.8907\ . \end{aligned}$$

4. L'importazione di grano in migliaia di tonnellate negli anni $1991 - 1997$ è riportata nella seguente tabella:

| *anno* $(j)$ | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *quantità* $(q_j)$ | 1534 | 2323 | 2340 | 2150 | 2460 | 2470 | 2510 |

Si calcoli per il periodo considerato la variazione relativa media annua (o tasso di variazione medio annuo) del fenomeno commentando opportunamente.

**Svolgimento**
Le variazioni relative annuali della quantità di grano importata sono date da:

$$V_{j.j-1} = \frac{q_j - q_{j-1}}{q_{j-1}} = \frac{q_j}{q_{j-1}} - 1 = I_{j.j-1} - 1 \qquad j = 1991, 1992, ..., 1997.$$

Il loro calcolo è riportato nella seguente tabella:

| **Anno (j)** | **quantità ($\mathbf{q_i}$)** | $\mathbf{I_{j.j-1}}$ | $\mathbf{V_{j.j-1}}$ |
|---|---|---|---|
| 1991 | 1534 | – | – |
| 1992 | 2323 | 1.5143 | 0.5143 |
| 1993 | 2340 | 1.0073 | 0.0073 |
| 1994 | 2150 | 0.9188 | -0.0812 |
| 1995 | 2460 | 1.1442 | 0.1442 |
| 1996 | 2470 | 1.0041 | 0.0041 |
| 1997 | 2510 | 1.0162 | 0.0162 |

Ad esempio, la variazione relativa $V_{1992.1991}$, dice che le importazioni di grano del 1992 sono state maggiori del 51.43% rispetto a quelle del 1991. $V_{1994.1993}$ dice che le importazioni di grano del 1994 sono state minori dell'8.12% rispetto a quelle del 1993. In modo analogo si commentano le altre variazioni relative annuali.
La variazione relativa media annua (o tasso di variazione medio annuo) della quantità di grano importata, è data da:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \left\{ \prod_{j=1991}^{1997} (1 + V_{j.j-1}) \right\}^{\frac{1}{6}} - 1 \\ &= \left\{ \prod_{j=1991}^{1997} I_{j.j-1} \right\}^{\frac{1}{6}} - 1 \\ &= \bar{I} - 1 \end{aligned}$$

dove, come è possibile osservare, si è indicato con $\bar{I}$ la media geometrica dei numeri indici a base mobile $I_{j.j-1}$.
Osserviamo inoltre che:

$$\prod_{j=1991}^{1997} I_{j.j-1} = I_{1997.1991} = \frac{q_{1997}}{q_{1991}}.$$

La media geometrica $\bar{I}$ dei numeri indici a base mobile, di conseguenza, è data da:

$$\bar{I} = (I_{1997.1991})^{\frac{1}{6}} = \left( \frac{2510}{1534} \right)^{\frac{1}{6}} = 1.0855$$

Abbiamo dunque che:

$$\bar{V} = \left( \frac{2510}{1534} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.0855 - 1 = 0.0855 \ .$$

La variazione relativa media annua della quantità di grano importata, risulta essere pari a 0.0855. Essa ci indica che, mediamente, negli anni dal 91 al 97, si è osservata una crescita annuale delle importazioni di grano pari all' 8.55%.

5. La seguente tabella riporta il numero di autovetture nuove immatricolate nel periodo gennaio-settembre 2005 (Fonte: Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti):

| *Mese* | Genn. | Feb. | Marzo | Aprile | Maggio | Giugno | Luglio | Agosto | Sett. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| immatric. | 212568 | 195518 | 228104 | 195388 | 149229 | 233901 | 211227 | 97048 | 186759 |

Si calcoli la variazione relativa media mensile (o tasso di variazione medio mensile) del fenomeno per il periodo considerato.

**Svolgimento**
La variazione relativa media mensile è data da

$$\bar{V} = \bar{I} - 1$$

dove con $\bar{I}$ si è indicata la media geometrica dei numeri indici a base mobile la quale risulta essere pari a:

$$\bar{I} = \left(\frac{186759}{212568}\right)^{\frac{1}{8}} = 0.9839 \quad .$$

La variazione relativa media mensile risulta quindi:

$$\bar{V} = \left(\frac{186759}{212568}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0.9839 - 1 = -0.0161 \quad .$$

Concludendo, la variazione relativa media mensile del numero di immatricolazioni, risulta essere pari a $-0.0161$. Essa indica che, mediamente, nei mesi da gennaio a settembre del 2005, si è osservata una diminuzione mensile delle immatricolazioni di auto pari all'1.61%.

6. Su un collettivo di 5 addetti vengono analizzati il carattere $X$ ='numero di ore lavorate nell'ultimo mese' ed il carattere $Y$ ='numero di pezzi prodotti nell'ultimo mese':

| *Addetto* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 222 | 243 | 225 | 206 | 248 |
| $Y$ | 1506 | 1602 | 1501 | 1493 | 1655 |

Si determini la media geometrica del numero di pezzi prodotti in un'ora.

**Svolgimento**
E' necessario, partendo dai dati forniti dal testo dell'esercizio, calcolare il numero

medio $z_i$ di pezzi prodotti in un ora di lavoro da ciascuno dei cinque addetti. Il calcolo di tali valori è riportato nella seguente tabella.

| **Addetto** | $\mathbf{x_i}$ | $\mathbf{y_i}$ | $\mathbf{z_i = y_i \backslash x_i}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 222 | 1506 | 6.78 |
| 2 | 243 | 1602 | 6.59 |
| 3 | 225 | 1501 | 6.67 |
| 4 | 206 | 1493 | 7.25 |
| 5 | 248 | 1655 | 6.67 |

La media geometrica del numero di pezzi prodotti in un'ora è data dunque da:

$$\begin{aligned} M_0(Z) &= \sqrt[5]{(6.78) \cdot (6.59) \cdot (6.67) \cdot (7.25) \cdot (6.67)} \\ &= 6.79 \end{aligned}$$

In alternativa avremmo potuto ricavare il valore di $M_0(Z)$ sfruttando la seguente proprietà[2] della media geometrica:

$$M_0\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{M_0(Y)}{M_0(X)}.$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$M_0(Y) = \sqrt[5]{(1506) \cdot (1602) \cdot (1501) \cdot (1493) \cdot (1655)} = 1550.048$$

$$M_0(X) = \sqrt[5]{(222) \cdot (243) \cdot (225) \cdot (206) \cdot (248)} = 228.293.$$

Concludendo, abbiamo che

$$M_0(Z) = M_0(\frac{Y}{X}) = \frac{1550.048}{228.293} = 6.79$$

che coincide con il risultato ottenuto in precedenza.

7. Un carattere quantitativo viene rilevato su 5 individui ottenendo le seguenti osservazioni: 13, 5, 7, 26, 19. Si calcolino la media armonica e la media quadratica della distribuzione.

**Svolgimento**

Nella seguente tabella sono riportati alcuni calcoli utili per lo svolgimento dell'esercizio.

| $\mathbf{x_i}$ | $\mathbf{1 \backslash x_i}$ | $\mathbf{x_i^2}$ |
|---|---|---|
| 13 | 0.0769 | 169 |
| 5 | 0.2 | 25 |
| 7 | 0.1428 | 49 |
| 26 | 0.0385 | 676 |
| 19 | 0.0526 | 361 |
| **tot** | 0.5109 | 1280 |

[2] Zenga M., *Lezioni di statistica descrittiva*, pag. 134: seconda proprietà della media geometrica.

La media armonica della distribuzione è data da:

$$M_{-1} = \frac{5}{\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}} = \frac{5}{0.5109} = 9.7872.$$

La media quadratica della distribuzione è data da:

$$\begin{aligned} M_2 &= \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2} \\ &= \sqrt{\frac{1280}{5}} \\ &= \sqrt{256} = 16. \end{aligned}$$

8. Si calcolino la media armonica e la media quadratica della seguente distribuzione:

| $x_j$ | 5 | 20 | 40 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 20 | 40 | 60 | 50 | 30 |

Si calcolino inoltre media aritmetica e media geometrica verificando numericamente la relazione di ordinamento:

$$M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2.$$

**Svolgimento**

Nella seguente tabella sono riportati alcuni calcoli utili per lo svolgimento dell'esercizio.

| $\mathbf{x_j}$ | $\mathbf{n_j}$ | $\mathbf{x_j \cdot n_j}$ | $\log(\mathbf{x_j})$ | $\log(\mathbf{x_j}) \cdot \mathbf{n_j}$ | $\mathbf{x_j^{-1}}$ | $\mathbf{x_j^{-1} \cdot n_j}$ | $\mathbf{x_j^2}$ | $\mathbf{x_j^2 \cdot n_j}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 100 | 1.6094 | 32.1887 | 0.2 | 4 | 25 | 500 |
| 20 | 40 | 800 | 2.9957 | 119.8293 | 0.05 | 2 | 400 | 16000 |
| 40 | 60 | 2400 | 3.6889 | 221.3328 | 0.025 | 1.5 | 1600 | 96000 |
| 60 | 50 | 3000 | 4.0943 | 204.7172 | 0.01667 | 0.8333 | 3600 | 180000 |
| 90 | 30 | 2700 | 4.4998 | 134.9943 | 0.0111 | 0.3333 | 8100 | 243000 |
| **Tot** | 200 | 9000 | – | 713.0623 | – | 8.6667 | – | 535500 |

La media aritmetica del carattere rilevato è data da:

$$M_1 = \frac{1}{200}\sum_{j=1}^{5} x_j \cdot n_j = \frac{9000}{200} = 45.$$

La media goemetrica del carattere rilevato è data da:

$$\begin{aligned} M_0 &= \exp\left(\frac{1}{200}\sum_{j=1}^{5} \log(x_j) \cdot n_j\right) \\ &= e^{\frac{713.0623}{200}} \\ &= e^{3.5653} = 35.3505. \end{aligned}$$

La media armonica del carattere rilevato è data da:

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \frac{200}{\sum_{j=1}^{5} x_j^{-1} \cdot n_j} \\ &= \frac{200}{8.6667} = 23.0769. \end{aligned}$$

La media quadratica del carattere rilevato è data da:

$$\begin{aligned} M_2 &= \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{j=1}^{5} x_j^2 \cdot n_j} \\ &= \sqrt{\frac{535500}{200}} = 51.7446. \end{aligned}$$

E' facile osservare che i valori medi appena ricavati soddifano la relazione d'ordine riportata dal testo dell'esercizio. Infatti:

$$(M_{-1} = 23.0769) \leq (M_0 = 35.3505) \leq (M_1 = 45) \leq (M_2 = 51.7446)\,.$$