Titolo nota 13/05/2019

MICROECONOMETRIA – LEZIONE 3

DATI PANEL – POOLED TIME SERIES

$(N < T)$

$$y_{it} = \alpha_i + \sum_{r=2}^{K} \beta_{ri} X_{rit} + v_{it}, \quad i = 1 \ldots N, \quad t = 1 \ldots T$$

PARAMETRI SPECIFICI PER CIASCUN INDIVIDUO

$$\underset{T\cdot 1}{y_i} = \underset{1\cdot 1}{\alpha_i}\,\underset{T\cdot 1}{\jmath} + \underset{T(K-1)}{x_i^{*}}\,\underset{(K-1)\cdot 1}{\beta_i} + \underset{T\cdot 1}{U_i} = x_i\delta_i + U_i$$

$$\underset{NT\cdot 1}{y} = \underset{NT\cdot NK}{X}\,\underset{NK\cdot 1}{\delta} + \underset{NT\cdot 1}{U}$$

PIENA (*)

IPOTESI: $\underset{NT\cdot NT}{E(UU')} \equiv \Phi = \Sigma_N \otimes I_T$

(*) ETEROSCHEDASTICITÀ TRA INDIVIDUI DIVERSI

CORRELAZIONE CONTEMPORANEA TRA GLI ERRORI

DELLE DIVERSE EQUAZIONI DEL SISTEMA

STIMATORE : GLS di sistema = SUR

$$\hat{\delta}_{SUR} = \left(X' \Phi^{-1} X\right)^{-1} X' \Phi^{-1} y$$

$$\hat{\Phi} : \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{RSS_i}{T-K} = \frac{\hat{u}_i'\hat{u}_i}{T-K}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{u}_i'\hat{u}_j}{T-K} \quad , \; i \neq j$$

N.B. SUR = OLS (EQUAZIONE PER EQUAZIONE)

SE I REGRESSORI SONO GLI STESSI, INDIPENDENTEMENTE DALLA FORMA DI Σ_H, E IL SISTEMA È NON RISTRETTO

STESSI REGRESSORI

Es.
$$\begin{cases} Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_2 \underline{\underline{X_{21t}}} + \beta_3 \underline{\underline{X_{31t}}} + U_{1t} \\ Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_4 \underline{\underline{X_{21t}}} + \beta_5 \underline{\underline{X_{31t}}} + U_{2t} \end{cases}$$

$\Downarrow$ SUR = OLS

IPOTESI : $\boxed{\beta_2 = \beta_4}$ $\boxed{\beta_3 = \beta_5}$ CROSS-EQUATION RESTRICTIONS

$\Downarrow$

SUR $\neq$ OLS

DATI PANEL — LONGITUDINALI $(N > T)$

2 PROBLEMI : 1) ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE È RILEVANTE

2) NUMERO DI PARAMETRI DA STIMARE È MOLTO GRANDE

$(NK \quad)$

CARATTERISTICHE DELL'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE

(i) NON È OSSERVABILE DIRETTAMENTE

(ii) CORRELATA CON LE CARATTERISTICHE INDIVIDUALI, CIOÈ CORRELATA CON I REGRESSORI (X)

RISPOSTA ALL'ELEVATO NUMERO DI PARAMETRI

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_i, & i = 1 \ldots N \\ \beta_{ri}, & r = 2 \ldots K \end{array}\right\} NK$$

$\boxed{\text{IPOTESI}}$: α_i, $i = 1 \ldots N$ (SPECIFICI PER CIASCUN INDIVIDUO)

β_r, $r = 2 \ldots K$ (COMUNI TRA INDIVIDUI DIVERSI)

$\Downarrow$

$\Downarrow$

L'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE VIENE "CATTURATA"

DAI SOLI PARAMETRI α_i, <u>EFFETTI INDIVIDUALI</u>

$\Downarrow$

$NK \longrightarrow N+K-1$

NUMERO DI PARAMETRI DATA L'IPOTESI

$\beta_{2i} = \beta_2 \,, \forall i$

RISPOSTA ALL'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE

RISPOSTA 1 : l'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE VIENE MODELLATA CON EFFETTI INDIVIDUALI FISSI/FIXED

RISPOSTA 2 : l'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE VIENE MODELLATA CON EFFETTI INDIVIDUALI CASUALI/RANDOM

RISPOSTA 1: MODELLO DI RIFERIMENTO / MODELLO A EFFETTI FISSI

$$y_{it} = \alpha_i + \sum_{r=2}^{K} \beta_r X_{rit} + u_{it}$$

$i = 1 \ldots N$
$t = 1 \ldots T$

EFFETTI FISSI, CIOÈ PARAMETRI **NON NOTI** (***) **STIMATI INSIEME AI** PARAMETRI β_r, $r = 2 \ldots K$

(***)

(**) ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE NON OSSERVATA DIRETTAMENTE

(***) ETEROGENEITÀ " È CORRELATA CON X_{rit}, $r = 2, \dots, K$

RISPOSTA 2 : MODELLO DI RIFERIMENTO / MODELLO A EFFETTI CASUALI

$$\alpha_i = \alpha + \mu_i \qquad i = 1 \ldots N$$

$$y_{it} = \alpha_i + \sum_z \beta_z x_{zit} + u_{it} = \alpha + \mu_i + \sum_{z=2}^{K} \beta_z x_{zit} + u_{it}$$

$$= \alpha + \sum_z \beta_z x_{zit} + \underbrace{(\mu_i + u_{it})}_{\nu_{it}}$$

μ_i È UNA VARIABILE CASUALE

$\nu_{it} \equiv \mu_i + u_{it}$ È UN ERRORE "COMPOSTO"

EFFETTO INDIVIDUALE CASUALE

ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE NON OSSERVATA, QUINDI MODELLATA CON UNA VARIABILE CASUALE (**)

↳ ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE CORRELATA CON X_{2it} ?

VISTO CHE IL MODELLO A EFFETTI CASUALI CATTURA L'ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE COME PARTE DELL'ERRORE v_{it}, I PARAMETRI α E β_2, $2=2 \dots K$ <u>NON</u> POSSONO ESSERE STIMATI CON MINIMI QUADRATI (OLS/GLS) PERCHÉ <u>INCONSISTENTI</u> IN

PRESENZA DI CORRELAZIONE TRA ERRORI E REGRESSORI $\Longrightarrow$ STIMATORI A VARIABILI STRUMENTALI

ALTERNATIVAMENTE, PER POTER STIMARE CONSISTENTE-MENTE α E β_r, $r=2..K$, IN UN MODELLO CON EFFETTI CASUALI, UTILIZZANDO I MINIMI QUADRATI, Dobbiamo ipotizzare che μ_i e X_{2it} **NON** siano correlati, cioè che l'eterogeneità individuale, quando viene trattata come random, **non sia correlata con** X_{2it}

MODELLO A EFFETTI FISSI

(1) $$y_{it} = \alpha_i + \sum_{l=2}^{k} \beta_l X_{lit} + u_{it}$$

EFFETTI FISSI, STIMATI INSIEME A β_l, $l = 2 \ldots k$
(CORRELAZIONE TRA ETEROGENEITÀ INDIVIDUALE E REGRESSORI CONSENTITA)

IPOTESI: X_{rit} NON RANDOM, $r = 2 \dots K$, $i = 1 \dots N$, $t = 1 \dots T$

U_{it} ERRORI "CLASSICI" $\to$

- $E(U_{it}) = 0, \forall i,t$
- $VAR(U_{it}) = \sigma_u^2, \forall i,t$
- $COV(U_{it}, U_{js}) = 0, \forall i \neq j, t \neq s$

AGGREGHIAMO (1) RISPETTO AL TEMPO t :

(2) $$\underset{T\cdot 1}{y_i} = \underset{1\cdot 1}{\alpha_i} \underset{T\cdot 1}{J} + \underset{T\cdot(K-1)}{x_i^*} \cdot \underset{(K-1)\cdot 1}{\beta} + \underset{(T\cdot 1)}{u_i} = x_i \delta_i + u_i$$

DOVE $$\underset{T\cdot K}{x_i} \equiv \left(\underset{T\cdot 1}{J} \,\vdots\, \underset{T\cdot(K-1)}{x_i^*} \right) \; ; \; \underset{K\cdot 1}{\delta_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}$$

AGGREGHIAMO (2) RISPETTO AGLI INDIVIDUI $i = 1 \dots N$

$$(3) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{NT \cdot 1} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} J & & 0 \\ & J & \\ 0 & & J \end{pmatrix}}_{NT \cdot N} \underbrace{\begin{array}{|c} x_1^* \\ x_2^* \\ x_i^* \\ \vdots \\ x_N^* \end{array}}_{NT \cdot (K-1)}}_{NT \cdot (N+K-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_i \\ \alpha_N \\ \hline \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}}_{(N+K-1) \cdot 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{NT \cdot 1}$$

y_i: $T \cdot 1$

J: $T \cdot 1$

x_i^*: $T \cdot (K-1)$

u_i: $T \cdot 1$

α

β

$$(3') \qquad \underset{NT\cdot 1}{y} = \underset{NT\cdot(N+K-1)}{X}\,\underset{(N+K-1)\cdot 1}{\delta} + \underset{NT\cdot 1}{u}$$

DOVE $\underset{NT\cdot NT}{E(uu')} = \sigma_u^2 I_{NT}$

X NON RANDOM

$\hat{\delta}$?

OLS : $\boxed{\hat{\delta} = (X'X)^{-1} X'y}$

DOVE $X'X$ È MATRICE QUADRATA DI ORDINE $\underline{\underline{N+K-1}}$

ATTENZIONE: SE N GRANDE, ALLORA
$N+K-1$ GRANDE, LA MATRICE $X'X$
È UNA MATRICE DI GRANDI DIMENSIONI,
POSSIBILI PROBLEMI COMPUTAZIONALI NEL
CALCOLO DELLA SUA INVERSA

SOLUZIONE : UTILIZZARE PER IL CALCOLO DELLA INVERSA DI $X'X$ LE FORMULE DELL'INVERSA PARTIZIONATA.

$$X = \left(\begin{array}{cccc|c} J & & & 0 & x_1^* \\ & J & & & x_2^* \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & J & x_N^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_N \otimes J & X^* \end{array}\right)$$

with $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_N^* \end{pmatrix}}_{X^*}$

DA WI :

$$X'X = \left(\begin{array}{c|c} (I_N \otimes J)'(I_N \otimes J) & (I_N \otimes J)' X^* \\ \hline X^{*\prime}(I_N \otimes J) & X^{*\prime} X^* \end{array}\right)$$

$$\min_{\delta} S(\cdot) = u'u$$

$\Downarrow$

FOC: $\dfrac{\partial S(\cdot)}{\partial \delta} = 0$ (SISTEMA DI N+K-1 EQUAZIONI IN N+K-1 INCOGNITE)

EQUAZIONI NORMALI: $X'X\delta = X'y$

$$\left(\begin{array}{c|c} (I_N \otimes J)'(I_N \otimes J) & (I_N \otimes J)' X^* \\ \hline X^{*\prime}(I_N \otimes J) & X^{*\prime} X^* \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \hline \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_N \otimes J)' \\ \hline X^{*\prime} \end{pmatrix} y$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}$$

↳ APPLICANDO FORMULE DELL' INVERSA PARTIZIONATA,

OTTENIAMO :

$$\underset{(k-1)\cdot 1}{\hat{\beta}} = \left(X^{*\prime} D X^{*}\right)^{-1} X^{*\prime} D Y$$

$$\hat{2} \otimes J = CY - CX^{*}\hat{\beta}$$

DOVE D E C SONO MATRICI $NT \cdot NT$ IL CUI CONTENUTO VEDREMO NELLA LEZIONE 4