MICROECONOMETRIA – LEZIONE 4

Titolo nota 14/05/2019

MODELLO A EFFETTI FISSI

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}_{T\cdot 1}}_{Y} = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} J & & & 0 & x_1^* \\ & \underbrace{J}_{T\cdot 1} & & & x_i^* \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & J & x_N^* \end{array}\right)}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \hline \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}}_{\delta} \begin{matrix} \alpha_{N\cdot 1} \\ \\ \\ \beta_{(K-1)\cdot} \end{matrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{U}$$

OLS : $\hat{\delta} = \underbrace{(X'X)}_{(N+K-1)}^{-1} X'y$

GENERICA COLONNA NELLA PARTIZIONE DI SINISTRA DI X

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} T \cdot 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ NT \cdot 1 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \text{VARIABILE "DUMMY" BINARIA}$$

VISTO CHE IL MODELLO A EFFETTI FISSI CONTIENE N VARIABILI DUMMY (UNA PER CIASCUN INDIVIDUO) TRA I REGRESSORI, TALE MODELLO È NOTO, ANCHE CON IL NOME <u>DUMMY VARIABLES MODEL</u>

$$\underset{NT\cdot(N+K-1)}{X} \equiv \left(\underset{NT\cdot N}{I_N \otimes J} \;\vdots\; \underset{NT\cdot(K-1)}{X^*} \right)$$

EQUAZIONI NORMALI: $X'X\delta = X'y$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} (I_N \otimes J)'(I_N \otimes J) & (I_N \otimes J)' X^* \\ \hline X^{*\prime}(I_N \otimes J) & X^{*\prime} X^* \end{array}\right)}_{X'X} \underbrace{\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \beta \end{array}\right)}_{\delta} = \underbrace{\left(\begin{array}{c} (I_N \otimes J)' \\ \hline X^{*\prime} \end{array}\right)}_{X'} Y$$

USANDO FORMULE INVERSA PARTIZIONATA, OTTENIAMO:

OLS

$$\left\{\begin{aligned}
\underset{(K-1)\cdot 1}{\hat{\beta}} &= \Big(\underset{(K-1)NT}{X^{*\prime}}\,\underset{NT\cdot NT}{D}\,\underset{NT(K-1)}{X^{*}}\Big)^{-1}\underset{(K-1)NT}{X^{*\prime}}\,\underset{NT\cdot NT}{D}\,\underset{NT\cdot 1}{y} \\
\underbrace{\underset{N\cdot 1}{\hat{\alpha}} \otimes \underset{T\cdot 1}{J}}_{NT\cdot 1} &= \underset{NT\cdot NT}{C}\,\underset{NT\cdot 1}{y} - C\,\underset{NT(K-1)}{X^{*}}\,\underset{(K-1)\cdot 1}{\hat{\beta}}
\end{aligned}\right.$$

LE FORMULE DELL'INVERSA PARTIZIONATA HANNO RISOLTO IL PROBLEMA DELLA DIMENSIONALITÀ $(N+K-1)$ DI $X'X$

ORA DOBBIAMO INVERTIRE SOLAMENTE UNA MATRICE DI DIMENSIONE $\underline{\underline{K-1}}$ $\left(X^{*\prime} D X^{*} \right)$

MATRICI D E C

$$\underset{NT\cdot NT}{C} = I_N \otimes C_T \,, \quad \text{DOVE } C_T = \frac{JJ'}{T}$$

$$C_T = \frac{1}{T} \underset{T\cdot T}{\begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{NT\cdot NT}{D} \equiv I_N \otimes D_T \,, \quad \text{DOVE} \quad D_T = I_T - C_T$$

$$D_T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{T}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

INTERPRETAZIONE DI C_T E D_T (C, D)

GENERICA VARIABILE z_t , $t = 1 - T$

$$\underset{T \cdot 1}{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_t \\ z_T \end{pmatrix}$$

TRASFORMAZIONE "BETWEEN"

$$C_T z = \frac{1}{T} \underset{T \cdot T}{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}} \underset{T \cdot 1}{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_t \\ z_T \end{pmatrix}} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \sum_t z_t \\ \sum_t z_t \\ \vdots \\ \sum_t z_t \end{pmatrix} = \underset{T \cdot 1}{\begin{pmatrix} z_\bullet \\ z_\bullet \\ \vdots \\ z_\bullet \end{pmatrix}}$$

OPERATORE CHE TRASFORMA UNA VARIABILE NELLA SUA MEDIA CAMPIONARIA

DOVE $z_\bullet = \frac{1}{T} \sum_t z_t$

(MEDIA CAMPIONARIA DI z_t)

TRASFORMAZIONE "WITHIN"

$$D_T z = (I_T - C_T) \underset{(T\cdot 1)}{z} = \underset{T\cdot 1}{z} - \underset{T\cdot 1}{C_T z} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_t \\ z_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{z}_\cdot \\ \bar{z}_\cdot \\ \vdots \\ \bar{z}_\cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \bar{z}_\cdot \\ z_2 - \bar{z}_\cdot \\ \vdots \\ z_T - \bar{z}_\cdot \end{pmatrix}$$

OPERAZIONE CHE TRASFORMA UNA VARIABILE IN SCARTI DALLA MEDIA

PROPRIETÀ DELLE MATRICI C_T E D_T (C, D)

1) SIMMETRIA : $C_T = C_T'$; $D_T = D_T'$

$$\Big(\underbrace{\tfrac{1}{T} JJ'}_{C_T}\Big)' = \underbrace{\tfrac{1}{T} JJ'}_{C_T}$$

2) IDEMPOTENZA : $C_T \cdot C_T = C_T$

$$D_T \cdot D_T = D_T$$

$$\underbrace{\frac{1}{T} J J'}_{C_T} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} J J'}_{C_T} = \frac{1}{T^{\cancel{2}}} J \underbrace{J' J}_{\cancel{T}} J' = \underbrace{\frac{1}{T} J J'}_{C_T}$$

3) ORTOGONALITÀ : $C_T D_T = 0$

$$C_T (I_T - C_T) = C_T - C_T C_T = C_T - C_T = 0$$

STIMAZIONE **WITHIN**

INTERPRETAZIONE DI $\hat{\beta}$

$$\underset{(k-1)\cdot 1}{\hat{\beta}} = (X^{*\prime} D X^{*})^{-1} X^{*\prime} D y =$$

$$= (X^{*\prime} D' D X^{*})^{-1} X^{*\prime} D' D y =$$

$$= (\tilde{X}^{*\prime} \tilde{X}^{*})^{-1} \tilde{X}^{*\prime} \tilde{y}$$

DOVE

$NT \cdot 1$

$\tilde{y} \equiv Dy = y$ TRASFORMATO IN SCARTI DALLA MEDIA

$\tilde{X}^* \equiv DX^* = X^*$ " " " " "

$NT \cdot (K-1)$

CONCLUSIONE: PER OTTENERE LO STIMATORE OLS DI β, $\hat{\beta}$, È SUFFICIENTE TRASFORMARE y E X^* IN SCARTI DALLA MEDIA, APPLICANDO POI LA FORMULA "STANDARD" DELLO STIMATORE OLS

INTERPRETAZIONE DI $\hat{\alpha}$

$$\underset{N\cdot 1}{\hat{\alpha}} \otimes \underset{T\cdot 1}{J} = CY - CX^{*}\hat{\beta}$$

STIMATORE WITHIN

CY → TRASFORMAZIONE IN MEDIE (BETWEEN)

CX^{*} → TRASFORMAZIONE IN MEDIE (BETWEEN)

COMMENTO

$$y_{it} = \alpha_i + \sum_{z=2}^{K} \beta_z X_{zit} + U_{it} \quad \left(\text{MODELLO EFFETTI FISSI} \right)$$

IPOTESI : $N = 1$

$\Downarrow$ $\quad K-1 = 1$

(1) $y_t = \alpha + \beta X_t + U_t$

(1) OLS :

$$\begin{cases} \hat{\beta} = \dfrac{\sum_t (x_t - x_\cdot)(y_t - y_\cdot)}{\sum_t (x_t - x_\cdot)^2} \\ \hat{\alpha} = y_\cdot - x_\cdot \hat{\beta} \end{cases}$$

(2) $y_t - y_\cdot = \alpha + \beta x_t + u_t - y_\cdot$

DOVE $y_\cdot = \frac{1}{T} \sum_t y_t = \frac{1}{T} \sum_t (\alpha + \beta x_t + u_t) =$

$= \alpha + \beta x_\cdot + u_\cdot$

$$\underbrace{(y_t - y_\cdot)}_{\tilde{y}_t} = \cancel{\alpha} + \beta x_t + u_t - \cancel{\alpha} - \beta x_\cdot - u_\cdot$$

$$= \beta(x_t - x_\cdot) + (u_t - u_\cdot) \qquad u_\cdot = 0$$

$$= \beta\underbrace{(x_t - x_\cdot)}_{\tilde{x}_t} + u_t$$

(2) $\tilde{y}_t = \beta \tilde{x}_t + u_t$ $\longleftarrow$ (1) TRASFORMATO IN SCARTI DALLA MEDIA

N.B. (1) = (2)

(2) OLS : $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_t \tilde{y}_t \tilde{x}_t}{\sum_t \tilde{x}_t^2} =$

$$= \frac{\sum_t (y_t - y_\cdot)(x_t - x_\cdot)}{\sum_t (x_t - x_\cdot)^2}$$

INDIRETTAMENTE : $\hat{\alpha} = y_{\cdot} - x_{\cdot}\hat{\beta}$

(3) $y_t = \beta x_t + u_t$ $\quad (\underline{\underline{\alpha = 0}})$

$(1) = (2)$; $(1) \neq (3)$

$(2) \neq (3)$

STIMA DI σ_u^2

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{RSS}{NT - (N + K - 1)}$$

DAL MODELLO EFFETTI FISSI

TEST DELLA SIGNIFICATIVITÀ DEGLI EFFETTI FISSI

MODELLO A EFFETTI FISSI (MU) : $y_{it} = \alpha_i + \sum_{z=2}^{K} \beta_z x_{zit} + u_{it}$

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i = \dots = \alpha_N = \underline{\underline{\alpha}}$ (N-1 RESTRIZIONI)

(NO EFFETTI INDIVIDUALI)

H_0 È IPOTESI NULLA CONGIUNTA $\longrightarrow$ F-TEST

MODELLI DI "POOLING SEMPLICE"

(M_R) $$y_{it} = \alpha + \sum_{r=2}^{K} \beta_r x_{rit} + u_{it}$$

$$F\text{-TEST} = \frac{(RSS_R - RSS_U)/\underbrace{(N-1)}_{\text{N° RESTRIZIONI}}}{RSS_U/(NT-(N+K-1))} \underset{H_0}{\sim} F(DF1, DF2)$$

DOVE $DF1 = N-1$
$DF2 = NT-(N+K-1)$